

Equações de Euler Completas para Ondas Geradas por Deslizamentos Horizontais

João Vitor P. Poletto¹, Roberto Ribeiro-Jr²

UFPR, Curitiba, PR

David Andrade³

Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia

Marcelo V. Flamarion⁴

Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Peru

Este trabalho consiste numa extensão do estudo da dissertação de mestrado do autor, premiada com o Prêmio Clóvis Caesar Gonzaga da SBMAC em 2024. No presente trabalho, utilizamos as equações de Euler completas para calcular as ondas geradas por deslizamentos horizontais, que, juntamente com os terremotos, são responsáveis pela maioria dos tsunamis registrados [1]. Para isso, considera-se uma função que modela a topografia variável e o perfil de superfície livre é obtido a partir do movimento da primeira.

A abordagem numérica do problema consiste em modelar a topografia por um bloco rígido que se move a uma certa velocidade. Nesse cenário, diversas abordagens foram utilizadas para descrever a onda gerada, como modelos lineares [2, 4], assintóticos, com equações de KdV e Boussinesq (ver referências em [3]), e totalmente não lineares, como os que se baseiam nas equações de Navier-Stokes [1]. Sendo mais completo que modelos lineares e assintóticos, nosso modelo tende a capturar melhor o perfil da superfície livre e, embora seja mais simplificado que o de Navier-Stokes, descreve qualitativamente da mesma forma as ondas geradas em vários experimentos laboratoriais.

Apresentamos brevemente a formulação matemática do problema, cujos detalhes podem ser verificados em [3]. Consideramos o fluido invíscido e irrotacional e supomos que a onda aquática se propaga em um canal bidimensional. O fundo do canal é representado como $h_0 + h(x, t)$ e a superfície livre como $\zeta(x, t)$. Utilizando h_0 como escala de comprimento horizontal e vertical e $(gh_0)^{1/2}$ como a escala de velocidade, obtemos as seguintes equações de Euler adimensionais

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{para} \quad -1 + h(x, t) < y < \zeta(x, t), \quad (1)$$

$$\phi_y = h_t + \phi_x h_x \quad \text{em} \quad y = -1 + h(x, t), \quad (2)$$

$$\zeta_t + \phi_x \zeta_x - \phi_y = 0 \quad \text{em} \quad y = \zeta(x, t), \quad (3)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \zeta = 0 \quad \text{em} \quad y = \zeta(x, t). \quad (4)$$

Ademais, adicionamos condições de fronteira periódicas de período $2L$ às equações e as resolvemos numericamente através de um mapeamento conforme combinado com um método pseudo-espectral, que envolve um algoritmo de ponto fixo e o método Runge-Kutta clássico de quarta ordem (RK4).

Calculamos um mapeamento conforme dependente do tempo $f(\xi + i\eta, t) = x(\xi, \eta, t) + iy(\xi, \eta, t)$ para achatar a superfície livre e o fundo do canal uma faixa de comprimento D . Suas componentes $x(\xi, \eta, t)$ e $y(\xi, \eta, t)$ são funções harmônicas de ξ e η e a parte imaginária do mapeamento satisfaz

¹joapoletto@ufpr.br

²robertoribeiro@ufpr.br

³davideu.andrade@urosario.edu.co

⁴mvellosoflamarionvasconcellos@pucp.edu.pe

as condições de contorno: $y(\xi, 0, t) = \mathbf{Y}(\xi, t)$ e $y(\xi, -D, t) = -1 + \mathbf{H}(\xi, t)$ em que $\mathbf{H}(\xi, t) = h(x(\xi, -D, t), t)$ contém informações sobre as deformações do fundo e $\mathbf{Y}(\xi, t)$ diz respeito à elevação instantânea da superfície livre. Denotamos $\mathbf{X}(\xi, t) := x(\xi, 0, t)$ e $\Phi(\xi, t)$ e $\Psi(\xi, t)$ o potencial de velocidades e seu harmônico conjugado nas variáveis ξ e η avaliados em $\eta = 0$.

Através das equações de Euler, obtemos o seguinte sistema desacoplado

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{Y}_\xi \mathcal{C} \left[\frac{\Psi_\xi(\xi, t)}{J} \right] - \mathbf{X}_\xi \frac{\Psi_\xi(\xi, t)}{J}, \quad \Phi_t = \Phi_\xi \mathcal{C} \left[\frac{\Psi_\xi(\xi, t)}{J} \right] - \frac{1}{2J} (\Phi_\xi^2 - \Psi_\xi^2) - \mathbf{Y} \quad (5)$$

em que $J = \mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2$, $J_b = \mathbf{X}_{b\xi}^2 + \mathbf{Y}_{b\xi}^2$ (o índice b indica a avaliação das funções em $\eta = -D$),

$$\mathcal{C} \left[\frac{\Psi_\xi}{J} \right] = \mathcal{F}_{k_j \neq 0}^{-1} \left[i \coth(k_j D) \mathcal{F} \left[\frac{\Psi_\xi}{J} + \frac{h_t \mathbf{X}_{b\xi}}{J_b} \right] \right] - \langle M(\xi, t) \rangle, \quad (6)$$

e $M(\xi, t) = \mathbf{X}_\xi \mathcal{F}_{k_j \neq 0}^{-1} \left[i \coth(k_j D) \mathcal{F} \left[\frac{\Psi_\xi}{J} + \frac{h_t \mathbf{X}_{b\xi}}{J_b} \right] \right] + \mathbf{Y}_\xi \frac{\Psi_\xi}{J}$. A notação \mathcal{F} se refere à Transformada de Fourier e $\langle \cdot \rangle$ ao seu modo zero.

No trabalho em andamento, estudamos como o nosso modelo se aproxima de uma situação de laboratório proposta por Whittaker [4], descrita na Figura 12 de seu artigo, na qual um bloco rígido semi-elíptico se move horizontalmente e gera ondas de superfície. O bloco parte do repouso com aceleração fixa, seguido de um trecho de velocidade constante e então desacelera até o repouso.

Conforme Figura 1, utilizamos este experimento como referência para testar a eficácia de nosso método, e comparamos nosso modelo (linha azul) com dados experimentais (linha verde) e a teoria linear de Hammack [2] (linha vermelha). Os resultados mostram que nosso modelo se assemelha à solução experimental, indicando seu potencial para aplicações futuras.

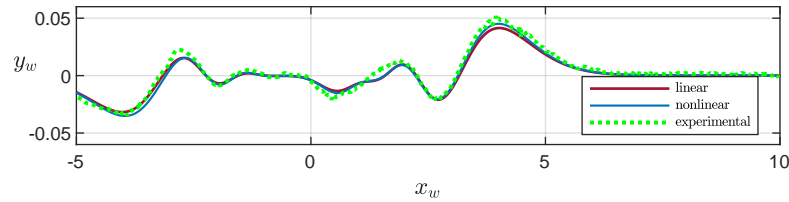


Figura 1: Gráfico das ondas geradas para $t_w = 8$. O índice w se refere à escala de laboratório.

Fonte: o autor.

Referências

- [1] Y. Chen, M. Hayatdavoodi, B. Zhao e R. C. Ertekin. “Waves Generated by the Horizontal Motions of a Bottom Disturbance”. Em: **Journal of Marine Science and Engineering** 12.11 (2024), pp. 1990. DOI: 10.3390/jmse12111990.
- [2] J. L. Hammack. “A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth”. Em: **Journal of Fluid Mechanics** 60.4 (1973), pp. 769–799. DOI: 10.1017/S00222112073000479.
- [3] J. V. P. Poletto, D. Andrade, M. V. Flamarion e R. Ribeiro-Jr. “Full Euler equations for waves generated by vertical seabed displacements”. Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 85.4 (2025), pp. 1344–1360. DOI: 10.1137/24M1658292.
- [4] C. Whittaker, R. Nokes e M. Davidson. “Tsunami forcing by a low Froude number landslide”. Em: **Environmental Fluid Mechanics** 15 (2015), pp. 1215–1239. DOI: 10.1007/s10652-015-9411-6.