

Anomalias de Pressão Abaixo de Ondas Estacionárias com Vorticidade Constante sobre Topografia Variável

Luiz G. Martins¹

UFPR, Curitiba, PR

Marcelo V. Flamarion²

Departamento Ciencias–Sección Matemáticas, PUCP, Lima, Peru

Roberto Ribeiro-Jr³

Departamento de Matemática, UFPR, Curitiba, PR

O entendimento do campo de velocidade submarino e da pressão abaixo de uma onda aquática é um tema de grande interesse tanto do ponto de vista das aplicações quanto do ponto de vista matemático. Do ponto de vista aplicado, ele tem um papel fundamental em áreas como oceanografia e biologia submarina. Do ponto de vista matemático, este problema é modelado por equações diferenciais parciais não lineares de fronteira livre e móvel, o que torna o estudo de suas propriedades um desafio.

Fisicamente, quando as ondas aquáticas são longas em comparação com a profundidade, elas podem ser modeladas por escoamentos com vorticidade constante e não nula. Com relação à pressão, em escoamentos irrotacionais (com vorticidade nula), sabe-se que o mínimo ocorre na superfície da onda, enquanto o máximo se encontra abaixo da crista, no fundo do canal. Além disso, a pressão é estritamente crescente com a profundidade ao longo de linhas verticais e estritamente decrescente ao longo de linhas horizontais que começam abaixo da crista e terminam no cavado [1]. No entanto, quando consideramos vorticidade constante não nula, essas afirmações, em geral, não se aplicam. Nesses casos, em que a pressão se comporta de maneira diferente da intuição física, dizemos que há uma anomalia de pressão.

A maioria dos trabalhos na literatura sobre ondas aquáticas em escoamentos com vorticidade constante limita-se ao estudo de ondas que se propagam sobre um fundo plano, o que leva à questão dos efeitos causados na pressão na presença de topografia variável. Nesse contexto, o objetivo geral deste trabalho é investigar, de forma numérica, a pressão abaixo de ondas estacionárias com vorticidade constante, considerando um fundo oceânico modelado por uma topografia variável no espaço.

Denotando por $\zeta(x, t)$ a superfície livre, $h(x)$ a topografia no fundo do canal, $P(x)$ a pressão na superfície livre, $\phi(x, y, t)$ o potencial de velocidade e $\psi(x, y, t)$ a sua conjugada harmônica, as equações governantes que descrevem a dinâmica das ondas aquáticas, nas variáveis adimensionais, são expressas por [2]:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0, & \text{em } -1 + h(x) < y < \zeta(x, t) \\ (F - \Omega)h_x + \Omega h h_x + \phi_x h_x = \phi_y, & \text{sobre } y = -1 + h(x) \\ \zeta_t + (F + \Omega\zeta + \phi_x)\zeta_x - \phi_y = 0, & \text{sobre } y = \zeta(x, t) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + (F + \Omega\zeta)\phi_x + \zeta - \Omega\psi = -P(x), & \text{sobre } y = \zeta(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

¹luiz.martins1@ufpr.br

²marcelo.flamarion@ufrpe.br

³robertoribeiro@ufpr.br

onde Ω corresponde a vorticidade adimensional e F ao número de Froude. A pressão adimensional no domínio do fluido $p(x, y)$ é dada por:

$$p = - \left(\frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_y^2) + (F + \Omega y) \psi_y + y - \Omega \psi \right). \quad (2)$$

A metodologia numérica empregada consiste em duas etapas: (i) desenvolvimento de um mapeamento conforme para reformular as equações de Euler em uma única equação diferencial, cujas derivadas são aproximadas via FFT, resultando em um sistema não linear resolvido pelo método de Newton; (ii) cálculo da pressão a partir das fórmulas do mapeamento conforme, após a determinação da superfície livre.

Nos ensaios numéricos, fixamos $F = 1.5$, consideramos a pressão na superfície livre como a atmosférica ($P(x) = 0$) e modelamos o fundo oceânico pela curva $h(x) = Ae^{-x^2}$, com $A = 0.1$ (lombada) e $A = -0.1$ (buraco). Para ambos os casos, calculamos os contornos de pressão no fluido, a pressão no fundo do canal e abaixo da crista da onda para diferentes valores de vorticidade Ω . Observamos que à medida que a vorticidade aumenta, em módulo, o mínimo global da pressão desloca-se da superfície livre para o fundo do oceano. A Figura (1) ilustra exemplos dessas anomalias de pressão.

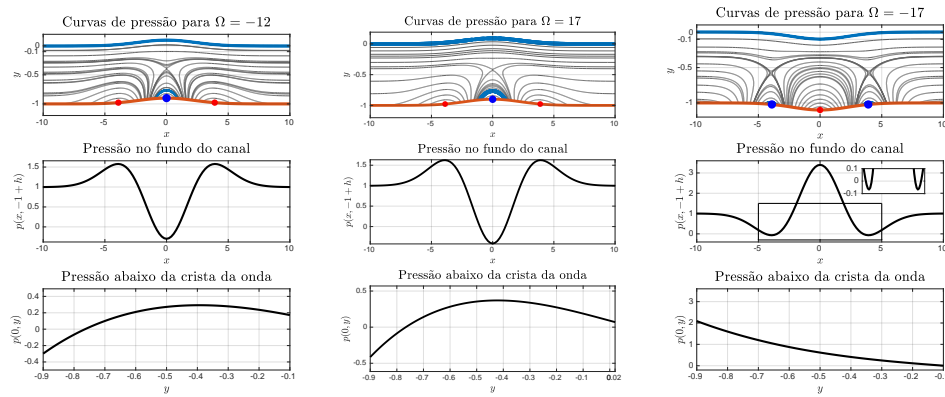


Figura 1: Surgimento de anomalias de pressão. Os pontos em vermelho indicam a localização do máximo global da pressão, enquanto os pontos em azul indicam a localização do mínimo global. A linha azul nos contornos de pressão de $\Omega = -12$ e $\Omega = 17$ indica os pontos nos quais a pressão é igual a pressão na superfície livre. Fonte: Dos Autores.

Neste estudo, consideramos $h(x) = Ae^{-x^2}$ e $P(x) = 0$. Uma continuidade natural deste trabalho é analisar o caso $h(x) = 0$ e $P(x) = Ae^{-x^2}$. Por fim, o autor Martins agradece à CAPES pelo financiamento deste estudo.

Referências

- [1] A. Constantin e W. Strauss. “Pressure beneath a Stokes wave”. Em: **Communications on Pure and Applied Mathematics** 63 (2010), pp. 553–557. DOI: 10.1002/cpa.20299.
- [2] M. V. Flamarion, A. Nachbin e R. Ribeiro Jr. “Time-dependent Kelvin cat-eye structure due to current-topography interaction”. Em: **Journal of Fluid Mechanics** 889 (2020). DOI: 10.1017/jfm.2020.51.