Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Equações Diferenciais Ordinárias Fracionárias

A.R. Gómez Plata.
IMECC, UNICAMP,13083-859, Campinas, SP
DPTO. MATEMATICAS, UMNG, Bogotá, Colombia
ra142301@ime.unicamp.br, adrian.gomez@unimilitar.edu.co

E. Capelas de Oliveira
IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
capelas@ime.unicamp.br.

RESUMO

Apresenta-se uma breve descrição das ferramentas matemáticas necessárias para entender e discutir as chamadas equações diferenciais ordinárias fracionárias, dependentes da ordem da derivada, que se constituem numa possível maneira de generalizar as equações diferenciais ordinárias. O objetivo é resolver tais equações, expressando a solução em termos das funções próprias do Cálculo Fracionário. Em particular estudamos a equação diferencial associada ao problema do chamado relaxamento (oscilações), dependendo de um parâmetro, comparando-o com a versão de ordem inteira.

Palavras-chave: *Transformada de Laplace, Função gama, Equações diferenciais ordinárias de ordem não inteira, Cálculo fracionário.*

Introdução

Em analogia da resolução de uma EDO, vamos utilizar neste trabalho a transformada de Laplace para resolver Equações Diferenciais Ordinárias Fracionárias (EDOF). As ferramentas matemáticas importantes para resolver uma EDOF são a função gama, funcão de Mittag-Leffler, a derivada fracionária no sentido de Caputo e Riemann-Liouville, a transformada de Laplace da derivada α de Caputo e Riemann-Liouville, com $m-1<\alpha<m, m\in N$.

A funcão gamma é definida para $Re(z)>0$,

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \tag{1}$$

de onde, integrando por partes, temos

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{2}$$

A chamada função de Mittag-Leffler de três parâmetros, para $z\in\mathbb{C}$, $\beta,\rho\in\mathbb{C}$ and $R(\alpha)>0$ é

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!} \tag{3}$$

No caso particular, $\rho=1$, temos a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

$$E^{1}_{\alpha,\beta}(z)=E_{\alpha,\beta}(z) \qquad (z\in\mathbb{C}) \tag{4}$$

e quando $\rho = 1, \beta = 1$, temos a clássica função de Mittag-Leffler de um parâmetro

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z) \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{5}$$

Por outro lado a integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$ para uma função causal bem comportada $f(t)$ é dada por [1]

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \alpha > 0. \tag{6}$$

Vamos utilizar a derivada de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$, para uma função causal bem comportada $f(t)$

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = n. \end{cases}$$

e também a chamada derivada de Caputo de ordem $\alpha > 0$

$$_cD^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = n. \end{cases}$$

A transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville de ordem α com $m-1 < \alpha < m$ é

$$\Im[D^\alpha f(t); s] = s^\alpha f\bar{(s)} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0^+), \tag{7}$$

$$g^{(k)}(0^+) := \lim_{t \to 0^+} D^k g(t), g(t) := J^{(m-\alpha)}, \tag{8}$$

enquanto que a transformada de Laplace da derivada de Caputo é

$$\Im[_cD^\alpha f(t); s] = s^\alpha f\bar{(s)} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0^+), \tag{9}$$

$$f^{(k)}(0^+) := \lim_{t \to 0^+} D^k f(t). \tag{10}$$

Neste trabalho, vamos discutir a equação diferencial fracionária de ordem $\alpha > 0$

$$_cD^\alpha u(t) = D^\alpha \left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0^+) \right) = -u(t) + q(t), \tag{11}$$

com $m-1 < \alpha < m$ de modo a propor exemplos, baseados nesta equação, cuja solução vem dada em termos das funções próprias do Cálculo Fracionário. Em particular estudamos a equação diferencial associada ao problema do chamado relaxamento (oscilações) fracionário, dependendo do parâmetro α, comparando-o com a versão de ordem inteira [2].

Referências

[1] R. Gorenflo and F. Mainardi: Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: A. Carpinteri and F. Mainardi (editors): Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer Verlag, Wien and New York, 1997, pp. 223- 276.

[2] A.R. Gómez Plata: Equações Diferenciais Parciais Fracionárias. Tese de Doutorado em Mátematica Aplicada. IMECC-UNICAMP (Em andamento).

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0212