Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Cálculo Fracional: Modelagem em Física dos Solos

José Weberszpil **Kamila C. do Nascimento** *
Depto. de Tecnologias e Linguagens, IM, UFRRJ,
26020-740, Nova Iguaçu, RJ
E-mail: josewebe@gmail.com, kamilakcn@gmail.com

RESUMO

Nesta contribuição, utilizamos o cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo fracionário (CF) para estudar a física dos solos, em especial o transporte de fluidos. Modelos que envolvem o CF vem se mostrando promissores por permitirem uma melhor descrição da dinâmica do transporte de fluidos através de zonas insaturadas em solos.

O modelo mais utilizado para a descrição do sistema hídrico é realizado através da equação de Richard [2] [1]. No entanto, a modelagem clássica envolve o cálculo de ordem inteira. A generalização dessa equação através do CF foi proposta [4], visando aplicações à descrição do processo de transporte de fluidos em meios porosos.

O CF é uma ferramenta matemática tão antiga quanto o cálculo usual e remonta a Leibniz [6]. Existem varias definições para a derivada fracionária, mas as mais utilizadas são as definições de Riemann-Liouville e de Caputo [5]. Nessa primeira abordagem utilizaremos somente a primeira: $D^\beta f(x) = D^n[J^v f(x)]$, onde $D^\beta f(x)$ é a derivada de ordem β de $f(x)$, para $x > 0$, D^n é a derivada de ordem inteira n e J^v a integral de Riemann-Liouville de ordem real v

$$J^v f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^t (t-\xi)^{v-1} f(\xi) d\xi, \tag{1}$$

onde$\Gamma(v)$ é uma função Gama definida por: $\Gamma(v) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{v-1} dt$.

Nosso objetivo mais básico aqui é o de estudarmos as consequências do uso da generalização fracionária da equação de Richard, seguindo os trabalhos de Pachepsky [4] e Gerolpymaton [2], em comparação aos modelos clássicos de ordem inteira. Numa etapa subsequente pretendemos realizar o mesmo estudo num contexto de derivadas fracionárias chamadas locais ou fractais [3], utilizando com dados obtidos através de medidas realizadas em solos do Brasil.

A lei de Darcy (originalmente aplicada ao estudo de fluxos em meios saturados) pode ser utilizada para meios insaturados e, a partir da mesma, se pode construir a equação de Richard (ER) clássica [2] como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(C(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}), \tag{2}$$

onde $C(\theta)$ é a difusividade da mistura em função do conteúdo volumétrico de água θ.

Usando a condição inicial: $\theta(0,x) = \begin{cases} \theta_1, & \text{se} \quad x = 0, \\ \theta_0, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$, podemos reformular a ER clássica como uma equação integral:

$$\theta(t,x) = \theta(0,x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}(C(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}) dt. \tag{3}$$

*bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0213

A ideia básica de generalizar a ER consiste em substituir a derivada de tempo $\frac{\partial}{\partial t}$ por uma derivada fracionária de ordem α. Esta substituição sugere escrever uma equação da forma:

$$D^{\alpha}(\theta) = \frac{\partial}{\partial x}(C_{\alpha}(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}). \quad (4)$$

Substituindo a integral do lado direito por um integrando de ordem $0 < \alpha \leq 1$, resulta então na equação de Richard fracionária (ERF):

$$\theta(t,x) = \theta(0,x) + I_0^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}(C_{\alpha}(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}). \quad (5)$$

Simulações numéricas realizadas por Pachepsky [4] para validar a ERF indicam a presença do efeito memória no fenômeno de transporte de água em solos e que pode ajudar a explicar a dependência de escala (leis de potência) e variabilidade na condutividade hidráulica dos solos, encontrada por pesquisadores que aplicaram a versão clássica da ER.

Os resultados de nossos estudos poderão fornecer condições para a elaborações melhores de programas de gerenciamento de poços, simulações de cenários futuros e em consequência a melhor proteção da qualidade da água subterrânea.

Palavras-chave: *Modelagem Matemática, Cálculo Fracional, Física dos Solos, Equação de Richard.*

References

[1] Bonganha, Carlos André et al. Conceitos e Fundamentos da Modelagem Matemática para Gerenciamento de Recursos Hídricos Subterrâneos.Revista Analytica. Araraquara. Nº 30, agosto/2007, p. 116-120. Agosto/Setembro 2007.

[2] Gerolymatou, E; Vardoulakis, I; Hilfer, R. Modelling infiltration by means of a nonlinear fractional diffusion model. Journal of Physics. Institute of Physics Publishing. **39**, (2006), 4104-4110.

[3] Hongguan Sun, Mark M. Meerschaert, Yong Zhang, Jianting Zhu, Wen Chen, A fractal Richards' equation to capture the non-Boltzmann scaling of water transport in unsaturated media, Advances in Water Resources 52 (2013) 292–295

[4] Pachepsky, Yakov; Timlin, Dennis; Rawls, Walter. Generalized Richards equation to simulate water transport in unsaturated soils. Elsevier. Journal of Hydrology. USDA, Beltsville, USA. **272** ,(2003), p. 3-13.

[5] Podlubny, Igor. Fractional Diferencial Equations: Mathematics in Science and Egeneering. Vol. 198, Academic Press, San Diego, (1999).

[6] Silva, Vivia Santos. Cálculo Fracional Aplicado à Modelagem de Sistemas Viscoelásticos. Monografia. UFRRJ (2014).

