

# Solução Analítica de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares que Modela o Processo de Digestão Anaeróbia em um Biodigestor Indiano

Nathalia K. S. Reyes<sup>1</sup> Carlos A. R. V. Tudela<sup>2</sup>  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRJ, Seropédica, RJ

Em virtude de atividades antropogênicas como o uso de combustíveis fósseis e a deflorestação, o carbono passou a ser lançado nos ecossistemas em grandes quantidades, assim aumentando o efeito estufa na atmosfera [2]. A pesquisa propõe a resolução analítica do modelo apresentado em [4], por meio da técnica de linearização por expansão em série de Taylor. O propósito é que o trabalho contribua para literatura científica sobre o estudo de biodigestores, com a finalidade de que venham a ser desenvolvidos processos mais robustos de fermentação anaeróbica que aumente a eficiência e a geração do biogás.

Em 2024, eventos globais que reforçam a temática ambiental ganharam visibilidade, como a COP 29 (29ª Conferência das Nações Unidas sobre Mudanças Climáticas) e o encontro do G20 (Grupo dos Vinte). Nestes eventos, foram discutidos temas como a transição energética, a descarbonização da economia e a necessidade de ampliar a sustentabilidade global. No Brasil, houveram dois acontecimentos importantes, o período para erradicação dos lixões que foi encerrado em agosto de 2024 (no entanto, essa meta está longe de ser cumprida). E o setor de resíduos sólidos tornou-se definitivamente a principal fonte estratégica para a descarbonização e a economia circular [1].

Dentre as problemáticas mundiais atuais tem-se a busca pela redução das emissões líquidas de GEE (gases com efeito estufa), de forma que o aumento da temperatura média global permaneça abaixo de 2 °C [2]. Além disso, a população brasileira padece com um aumento nos preços da energia elétrica [3]. Outra dificuldade enfrentada pela população mundial, dado que o mundo produz muito lixo não sendo diferente no Brasil, é o aumento na geração dos Resíduos Sólidos. Em 2023, segundo [1] o Brasil apresentou um crescimento médio de RSU (Resíduos Sólidos Urbanos) de menos de um por cento, a geração anual estimada foi por volta de 81 milhões de toneladas de RSU, o que corresponde a cerca de 382 kg de RSU por habitante em 2023.

A PNRS (Política Nacional de Resíduos Sólidos) Lei nº 12.305 de 2010, define que a gestão e o gerenciamento de RSU devem ter por objetivo o seguinte caminho: primeiramente a não geração de RSU, redução, reutilização, reciclagem, tratamento dos resíduos sólidos, assim como a disposição final ambientalmente adequada dos rejeitos [1].

De acordo com [2], o setor de energia e a gestão de resíduos sólidos representam grande parte das emissões de GEE. Dentro desse contexto, agregando a busca por modelos mais sustentáveis de gerenciamento do RSU com a exploração de fontes alternativas de energia (energias renováveis), das quais fazem parte por exemplo a energia eólica, solar e da biomassa. O interesse sobre os benefícios da energia gerada a partir da biomassa vem ganhando destaque, com o biogás produzido vindo de aterros sanitários ou de biodigestores.

Quanto ao cenário nacional, com o aumento na geração de resíduos e a escassez de aterros sanitários próximos aos centros urbanos, uma das principais técnicas para tratar o resíduo orgânico

---

<sup>1</sup>natty@ufrj.br

<sup>2</sup>carlos.reyna.veratudela@gmail.com

é a DA (digestão anaeróbia) em biodigestores especializados. Uma vez que, de acordo com [3] o país possui um conhecimento considerável para trabalhar com esta tecnologia. O material orgânico degradado nos biodigestores (ambiente controlado), gera o biogás. Esse gás é uma fonte de energia alternativa, que pode ser usado para variados propósitos, dentre estes tem-se a geração de energia elétrica [3].

O processo de DA no interior de um biodigestor é um processo complexo, que matematicamente pode ser descrito através de uma modelagem usando EDO's (equações diferenciais ordinárias) não lineares. O modelo utilizado como base para o desenvolvimento desta pesquisa apresentado no trabalho de [4], descreve um sistema de EDO's não lineares que inclui a variação do crescimento de bactérias, a produção de biogás no interior de um biodigestor indiano, tal como a variação do substrato. O modelo é apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left( -\frac{Q}{V} + \frac{\mu_m S}{K_S + S} \right) X \\ \frac{dP}{dt} = -\frac{Q}{V} P + \frac{\mu_m S}{K_S + S} \frac{X}{Y_P} \\ \frac{dS}{dt} = \frac{Q}{V} (S_0 - S) - \frac{\mu_m S}{K_S + S} \frac{X}{Y_S} \end{cases} \quad (1)$$

$X$  é a concentração de microrganismos (sólidos suspensos voláteis –  $SSV$  em  $gL^{-1}$ );  $\mu_m$  é a taxa de crescimento específico máximo das bactérias ( $dia^{-1}$ );  $S$  é a concentração de substrato ( $gL^{-1}$ );  $K_S$  é a constante de saturação ( $gL^{-1}$ );  $P$  é a concentração do biogás;  $Y_P$  é o coeficiente de rendimento celular de bactérias para produto ( $gg^{-1}$ );  $S_0$  é a concentração de substrato limitada do afluente ( $gL^{-1}$ );  $Y_S$  é o coeficiente de rendimento celular de bactérias para substrato ( $gg^{-1}$ );  $t$  é o tempo medido em dias;  $Q$  é a taxa de fluxo ou vazão ( $m^3/d^{-1}$ );  $V$  é o volume do reator ( $L$ ).

Para obtenção das soluções analíticas do sistema proposto, primeiramente foram encontrados os pontos de equilíbrio do sistema, considerando condições iniciais nulas e não nulas. Os pontos encontrados são:  $P_1 = (0, 0, 0)$  para  $(S_0 = 0)$  e  $P_2 = (0, 0, S_0)$ ,  $P_3 = (Y_S(S_0 - S), \frac{Y_S}{Y_P}(S_0 - S), \frac{\frac{Q}{V}K_S}{\mu_m - \frac{Q}{V}})$  para  $(S_0 \neq 0)$  e  $(S_0 > S)$ . De forma a simplificar  $P_3$ , chama-se  $x = \alpha$ , assim  $P_3 = (\alpha, \frac{\alpha}{Y_P}, S_0 - \frac{\alpha}{Y_S})$ . Vale ressaltar que o ponto encontrado por [4],  $P = (\alpha, \frac{\alpha}{Y_P}, -\frac{\alpha}{Y_S})$ , foi desconsiderado, uma vez que não faz sentido fisicamente o substrato ter valor negativo. Para linearização são escolhidos os pontos  $P_1$ , pois serve para entender a viabilidade do processo e  $P_3$ , pois ajuda a ter um controle sobre um reator em produção, ambos importantes.

## Referências

- [1] ABREMA. **Associação Brasileira de Resíduos e Meio Ambiente. Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil.** 2024.
- [2] R. M. Barros. “Energia de Biogás da Digestão Anaeróbia de Resíduos Sólidos Orgânicos e de Aterros Sanitários”. Em: **Revista O Futuro da Energia** 1 (2016), p. 1.
- [3] R. Q. Carvalho, A. N. Tavares, G. V. Santos e S. V. Bajay. **Oportunidades enterradas: geração elétrica a partir do biogás de resíduos sólidos urbanos.** Vitória: EDUFES, 2019, p. 320.
- [4] G. C. Tanaka. “Análise da dinâmica não linear do processo de biodigestão em um biodigestor indiano no espaço de estados via técnica de Lyapunov”. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, 2018.