

Análise da Influência do Fator de Amortecimento de um Sistema Massa-Mola-Amortecedor sob um Carregamento Estocástico

João F. C. Lobato,¹ Roberta Lima,² Rubens Sampaio³

Laboratório de Dinâmica e Vibrações, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro

Sistemas mecânicos sujeitos a carregamentos aleatórios são comuns em diversas aplicações, o que motiva este trabalho. Exemplos típicos incluem pontes expostas à ação do vento, às ondas do mar sobre os pilares que as sustentam e ao tráfego de veículos, bem como as pás de turbinas eólicas submetidas ao vento e um prédio durante um terremoto. Nesses casos, as vibrações aleatórias geradas pelas forças externas criam respostas estocásticas nos sistemas. Este trabalho tem como objetivo analisar a resposta de um sistema determinístico, linear e invariante no tempo com um grau de liberdade do tipo massa-mola-amortecedor, ilustrado na Figura 1, submetido a um carregamento modelado como um processo estocástico estacionário.

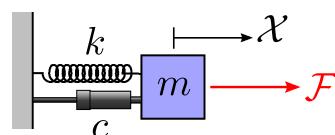


Figura 1: Sistema massa-mola-amortecedor analisado. Fonte: Autoria Própria.

Os parâmetros do sistema são: massa $m = 1 \text{ kg}$, constante de amortecimento do amortecedor $c = 2\zeta\omega_n$, rigidez da mola $k = 1 \text{ N/m}$. A posição da massa é parametrizada por \mathcal{X} e considera-se condições iniciais de posição e velocidade nulas. A amplitude F_a e frequência F_ω do carregamento estocástico \mathcal{F} são modeladas como variáveis aleatórias independentes e seguem distribuição normal $\mathcal{N}(1, 1/3)$. A Equação $\ddot{\mathcal{X}}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\mathcal{X}}(t) + \omega_n^2\mathcal{X}(t) = F_a \cos(F_\omega t)/m$, com $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e $\zeta = c/(2m\omega_n)$, rege a dinâmica do sistema. Este trabalho almeja reproduzir os gráficos da variação temporal da média e do desvio padrão da resposta para diferentes valores de ζ descritos por Benaroya e Han [1] com uma abordagem computacional, pelo método de Monte Carlo [2]. Em seguida, é feita uma análise da densidade espectral do processo estocástico do forçamento e da resposta para cada ζ considerado.

Para cada valor de ζ considerado, utilizando 30 mil realizações de F_a e F_ω , foram calculadas 30 mil realizações da resposta \mathcal{X} , e gerados os gráficos da Figura 2. Devido à estacionariedade da excitação \mathcal{F} , as estatísticas amostrais de \mathcal{X} convergem para um valor constante. O aumento do fator de amortecimento reduz o tempo do regime transiente, acelerando a convergência das estatísticas amostrais de média e desvio padrão. Também foram calculadas as correlações amostrais do forçamento e da resposta, dadas por $r_{\mathcal{F}}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\mathcal{F}(t_1)\mathcal{F}(t_2)]$ e $r_{\mathcal{X}}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[\mathcal{X}(t_1)\mathcal{X}(t_2)]$ para cada valor de ζ . Verificou-se que as correlações calculadas dependiam apenas de um parâmetro $\tau = t_2 - t_1$, ou seja, $r_{\mathcal{F}}(\tau) = \mathbb{E}[\mathcal{F}(t)\mathcal{F}(t+\tau)]$ e $r_{\mathcal{X}}(\tau) = \mathbb{E}[\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(t+\tau)]$. A partir da transformada

¹joaofelipecostalobato6@gmail.com

²robertalima@puc-rio.br

³rsampaio@puc-rio.br

de Fourier de $r_{\mathcal{F}}(\tau)$ e $r_{\mathcal{X}}(\tau)$, obteve-se a densidade espectral de \mathcal{F} e \mathcal{X} . A Figura 3 apresenta os resultados obtidos.

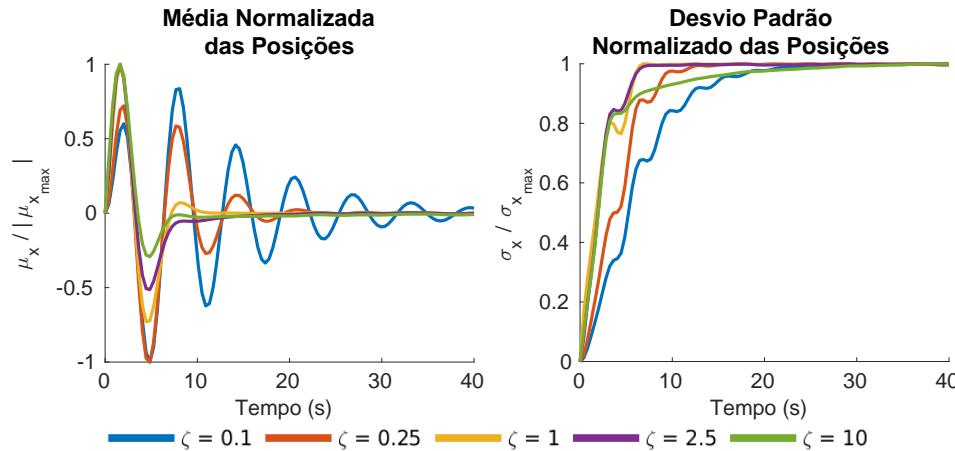


Figura 2: À esquerda, as médias amostrais normalizadas, e à direita, os desvios-padrão normalizados de \mathcal{X} para diferentes valores de fator de amortecimento. Fonte: Autoria Própria.

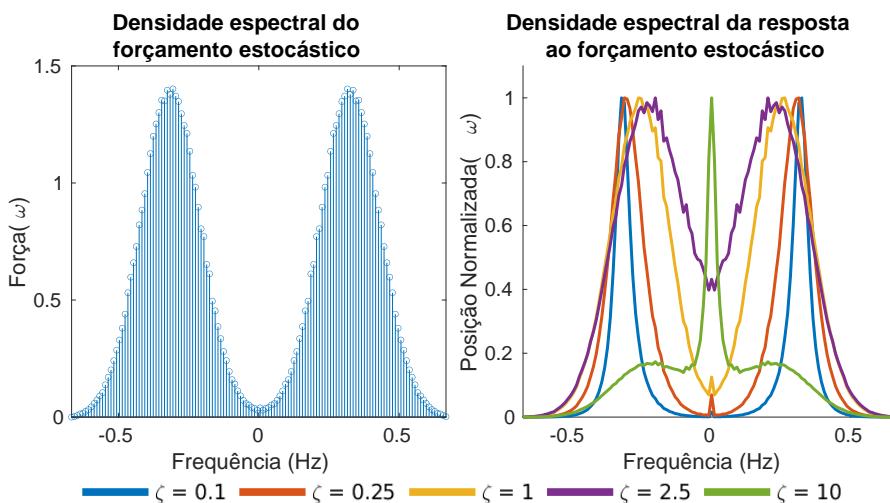


Figura 3: À esquerda, a densidade espectral do forçamento. À direita, a densidade espectral das respostas para diferentes fatores de amortecimento. Fonte: Autoria Própria.

Referências

- [1] H. Benaroya e S. M. Han. **Probability Models in Engineering and Science**. Boca Raton FL, Estados Unidos: Taylor & Francis Group, LLC, 2005. ISBN: 978-0-8247-2315-6.
- [2] R. Sampaio e R. Lima. **Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios**. Vol. 70. Notas em Matemática Aplicada. São Carlos - SP, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. ISBN: 978-85-8215-031-3.