Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Métodos Iterativos para a Solução da Equação de Poisson

João Pedro T. de Quadros[1]
Graduando em Engenharia Elétrica, CTC, UFSC, Florianópolis, SC
Priscila C. Calegari[2]
Departamento de Informática e Estatística, CTC, UFSC, Florianópolis, SC

A equação de Poisson modela diversos problemas de equilíbrio, isto é, problemas em que as propriedades de interesse são invariantes no tempo [2, 3]. Dentre eles, a distribuição de um Potencial Eletrostático V, em um domínio dielétrico Ω, de permissividade elétrica ϵ em que há uma distribuição de cargas $\rho(x,y)$ [1],

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\rho(x,y)}{\epsilon}. \tag{1}$$

O objetivo do presente trabalho é avaliar a eficiência de métodos iterativos para a solução do sistema linear oriundo da discretização da equação de Poisson (1) com, $\rho(x,y) = 8\pi^2 sen(2\pi x) sen(2\pi y)$ e $\epsilon = 1.0$, em um domínio $\Omega : [0,1] \times [0,1]$ com condições de contorno Dirichlet.

A equação de Poisson discreta, obtida em uma malha uniforme por meio do método de Diferenças Finitas de segunda ordem, com as incógnitas localizadas nos vértices das células da malha, é dada por

$$V_{i,j} = \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + \beta^2(V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) + \Delta x^2 \dfrac{\rho(x_i, y_j)}{\epsilon}}{2 + 2\beta^2}, \tag{2}$$

sendo V_{ij} o potencial elétrico no ponto (x_i, y_j), i, j índices da malha, e $\beta = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$, em que Δx e Δy, são respectivamente, o espaçamento entre pontos na direção x e y.

Foram avaliados os métodos iterativos de Gauss-Seidel (GS) e *Multigrid* (MG), em suas variantes V-Ciclo, W-Ciclo e F-Ciclo para a solução do sistema linear (2). A Tabela 1 apresenta a análise da ordem de convergência do problema discreto utilizando o método Multigrid V-Ciclo em diferentes malhas. Como a discretização é de segunda ordem, $\mathcal{O}(h^2)$, a razão entre dois erros consecutivos, e_h e $e_{h/2}$, deve convergir para 2^2, com $h = \max\{\Delta x, \Delta y\}$ [2]. A Tabela 2 apresenta, o erro, o valor máximo do resíduo, o número de iterações de cada método e o tempo de CPU.

Tabela 1: Análise de Convergência *V-Cycle*

h	$\|e\|_2$	Razão (esperado ≈ 4)
$1.25e-01$	$2.6514644e-02$	-
$6.25e-02$	$6.4753734e-03$	4.0946895
$3.125e-02$	$1.6094822e-03$	4.0232649
$1.5625e-02$	$4.0178884e-04$	4.0057912
$7.8125e-03$	$1.0041090e-04$	4.0014464
$3.90625e-03$	$2.5100458e-05$	4.0003612
$1.953125e-03$	$6.2749727e-06$	4.0000903

[1]jpteixei@gmail.com
[2]priscila.calegari@ufsc.br

Tabela 2: Análise Comparativa dos Métodos Iterativos

Método	$\|e\|_2$	$\|e\|_\infty$	$\|r\|_\infty$	N. Iterações	T. CPU (s)
GS	$6.14789e-06$	$1.75431e-09$	$7.46236e-05$	100000	248.763547
MGV	$6.27497e-06$	$1.88990e-09$	$3.44228e-10$	18	0.217137
MGW	$6.27497e-06$	$1.88990e-09$	$2.31097e-10$	11	0.185354
MGF	$6.27497e-06$	$1.88990e-09$	$2.03613e-10$	6	0.139712

Todos os métodos foram implementados pelos autores. Foram executados em um sistema *Intel Core* i5-1235U, com 16 GB de memória RAM. A Figura 1 apresenta o decaimento de resíduo dos métodos *Multigrid* [4]. O método GS atingiu o número máximo de iterações com o critério de parada $\|r\|_\infty < 10^{-9}$. O próximo passo será resolver (1) com condições de contorno Neumann.

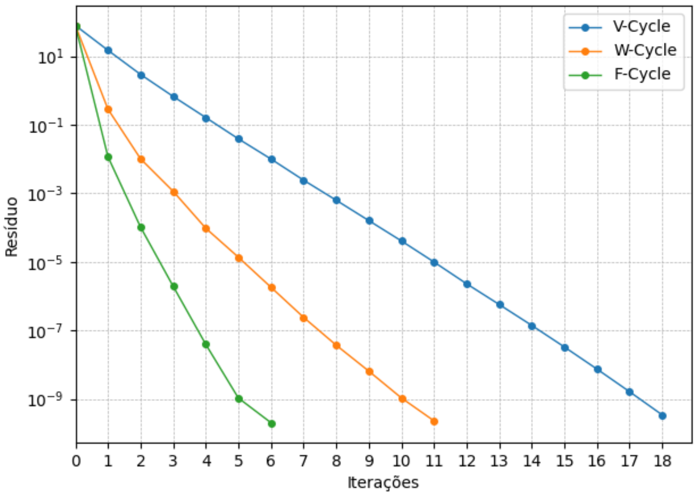

Figura 1: Gráfico Convergência *Multigrid*. Fonte: Próprios Autores

Agradecimentos

Agradecemos a UFSC, ao CTC e ao CNPq pelo fomento.

Referências

[1] J. P. A. Bastos. **Eletromagnetismo para Engenharia : Estática e Quase Estática**. Coleção didática. Ed. da UFSC, Florianópolis, 2018. ISBN: 978-853-280-829-5.

[2] A. O. Fortuna. **Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. EdUSP, 2000.

[3] W. Hackbush. **Elliptic Differential Equations**. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2017. ISBN: 978-3-662-54961-2.

[4] Y. Saad. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. Other Titles in Applied Mathematics. SIAM, 2003. ISBN: 978-0-89871-534-7.

