Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Comparação entre Elementos Finitos Triangulares e Quadriláteros na Solução da Equação de Poisson

Vinícius de C. Soares[1] Bruno A. do Carmo[2] Marcello G. Teixeira[3]
PPGI/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma ferramenta numérica eficaz para resolver equações diferenciais parciais. Eles subdividem o domínio em pequenos elementos de formas variadas, permitindo uma abordagem local e mais precisa, especialmente em problemas complexos que, devido à sua natureza, seriam difíceis ou até mesmo impossível de resolver analiticamente [2].

Este trabalho tem como objetivo estudar os conceitos fundamentais dos MEF, focando em avaliar o comportamento destes elementos diante do problema abordado. Para ilustra a aplicação do método, considera-se a equação de Poisson em um domínio bidimensional com condições de contorno de Dirichlet: dada uma função $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, determine $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + u(x,y) = f(x,y), & x,y \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & x,y \in \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

em que, $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, Γ a fronteira de Ω e $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Multiplicamos a formulação forte do problema, dado em (1), por uma função teste v que satisfaz a condição de fronteira do problema e seja suficientemente regular. O resultado é integrado em Ω e aplicando a condição de fronteira, obtém-se a formulação fraca

$$\int_\Omega \nabla u(x,y)^t \, \nabla v(x,y) \, d\Omega \; + \int_\Omega u(x,y) \, v(x,y) \, d\Omega \; = \int_\Omega f(x,y) \, v(x,y) \, d\Omega. \tag{2}$$

A partir da equação (2), atribuiu-se ao lado esquerdo o operador $\kappa(u, v)$ e ao lado direito o operador (f, v). Aplicado o método de Galerkin com um espaço aproximado de dimensão m, onde as funções φ_i para $i \in \{1, \cdots, m\}$ compõem a base, e assumindo que u e v pertence a esse espaço, obteve-se o problema aproximado, que pode ser desenvolvido até sua formulação na forma matriz-vetor, expressa por:

$$Kc = F, \tag{3}$$

onde $K_{ij} = \kappa(\varphi_j, \varphi_i)$ e $F_i = (f, \varphi_i)$ com $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $c \in \mathbb{R}^m$ e com a solução aproximada dada por $u_h = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i$.

Para resolver o sistema (3), foram desenvolvidos dois programas em Julia [1], testados com dados de entrada cuja solução do sistema (1) é conhecida. Os programas tem como base os conceitos de mudança de variáveis para o elemento referencial e integração numérica usando a Quadratura Gaussiana.

Um exemplo de aplicação do método trabalhado é a resolução do problema considerando a função $f(x,y) = (2\pi^2 + 1) \times sin(\pi x) \times sin(\pi y)$ com a solução analítica dada pela função $u(x,y) =$

[1] viniciussoares03@ufrj.br
[2] bruno.carmo@ppgi.ufrj.br
[3] marcellogt@ic.ufrj.br

© 2026 SBMAC

$sin(\pi x) \times sin(\pi y)$. Os resultados gráficos obtidos são apresentados na Figura 1, que mostra a solução analítica seguida das soluções aproximadas considerando 2^4 intervalos em cada direção.

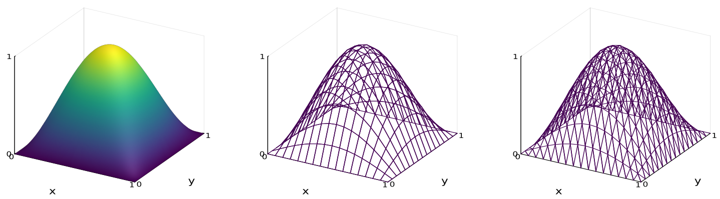

Figura 1: **a)** Solução do analítica do problema. **b)** Solução aproximada com elementos quadriláteros. **c)** Solução aproximada com elementos triangulares. Fonte: Autoria Própria.

Como a solução do problema é conhecida, é possível realizar o calculo do erro de convergência em ambos os programas. Para calcular o erro entre a solução exata $u(x, y)$ e a solução aproximada $u_h(x, y)$ foi usado a norma do erro definida como

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega |u(x,y) - u_h(x,y)|^2 \, dx \, dy}. \tag{4}$$

Desta forma, obtemos o gráfico da convergência do error dos programas. Os resultados são apresentados na Figura 2.

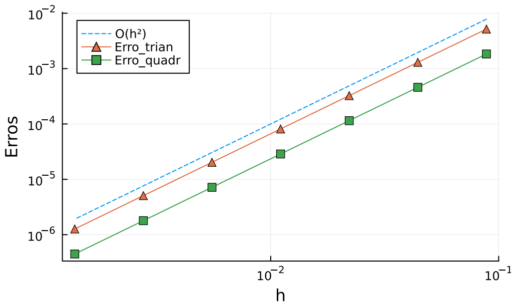

Figura 2: Convergência do erro na norma L^2, para 2^4 à 2^{10} em cada direção. Fonte: Autoria Própria.

Neste tipo de problema, embora o modelo com elementos quadriláteros apresente menor erro, o uso de elementos triangulares mostra-se mais eficiente do ponto de vista computacional, por requerer menos memória e tempo de processamento, mesmo com o dobro de elementos. Isso se deve à utilização do elemento referencial, que torna a segunda derivada constante, simplificando os cálculos. Assim, o modelo triangular revela-se a alternativa mais vantajosa para essa análise.

Referências

[1] Github. **Repositório do Github de Vinicius Castro**. Online. `https://github.com/viniccastro/MEF_Coparacao_Elementos.git`.

[2] M. A. Rincon e I-S. Liu. **Introdução ao Método de Elementos Finito**. 3a. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2020. ISBN: 978-65-86502-00-8.

© 2026 SBMAC