Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Novos Resultados em Partições

Cecília P. Andrade, Kênia C. P. Silva
Elen V. P. Silva
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, Unicamp,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: cissamat@gmail.com, kenia@ime.unicamp.br, elenvps@gmail.com.

Resumo: *Neste trabalho vamos apresentar resultados obtidos para as Mock Theta Functions $q\omega(q)$ e $f_0(q)$, através da representação de uma partição como matriz de duas linhas. Para cada inteiro positivo n, geramos todas as matrizes de duas linhas possíveis, somamos suas linhas, resultando em uma matriz de ordem 2×1 e depois contamos quantas vezes cada soma aparece. Dispomos estes dados em uma tabela e, a partir daí, foi possível conjecturar e demonstrar vários resultados interessantes a respeito de partições. Existem inúmeros resultados que podem ser obtidos e demonstrados combinatorialmente através desta nova estatítisca.*

Palavras-chave: *Partições, matrizes de duas linhas, Mock Theta Functions*

Em [4], foram dadas interpretações como matrizes de duas linhas para as Mock Theta Functions. Baseado nestas representações, introduzimos uma nova estatística, onde, para cada inteiro n, geramos todas as matrizes de duas linhas possíveis, somamos suas linhas, de forma que resulte uma matriz de ordem 2×1 e daí contamos a cardinalidade de tais matrizes. Tabelamos estes valores e então foi possível encontrar alguns resultados.

1 Mock Theta Function $q\omega(q)$

De acordo com [4], a função geradora para $q\omega(q)$ é

$$q\omega(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)+1}}{(q;q^2)^2_{n+1}}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = c_{t+1} + 2d_{t+1},\ c_s = 1.$$

Logo, a tabela associada a esta caracterização é a seguinte.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	1																																							
2	1	1																																						
3	1	1	1																																					
4	1	1	1	1																																				
5	1	1	1	2	1																																			
6	1	1	1	2	2	1																																		
7	1	1	1	2	2	2	1																																	
8	1	1	1	2	2	3	3	1																																
9	1	1	1	2	2	3	4	3	1																															
10	1	1	1	2	2	3	4	4	3	1																														
11	1	1	1	2	2	3	4	5	5	4	1																													
12	1	1	1	2	2	3	4	5	6	6	4	1																												
13	1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	7	4	1																											
14	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	9	8	5	1																										
15	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	10	9	5	1																									
16	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	11	12	10	5	1																								
17	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	14	14	11	6	1																							
18	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	16	16	13	6	1																						
19	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	17	19	19	14	6	1																					
20	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	21	23	21	15	7	1																				
21	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	25	26	24	17	7	1																			
22	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	26	29	30	27	18	7	1																		
23	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	31	34	35	30	20	8	1																	
24	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	36	40	40	34	22	8	1																
25	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	37	43	46	45	38	23	8	1															
26	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	45	50	53	52	42	25	9	1														
27	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	52	58	62	58	46	27	9	1													
28	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	53	61	68	70	65	51	29	9	1												
29	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	63	72	78	80	74	56	31	10	1											
30	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	74	83	90	91	82	61	33	10	1										
31	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	75	86	96	103	103	91	67	35	10	1									
32	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	88	100	111	118	116	102	73	37	11	1								
33	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	102	116	128	134	131	113	79	40	11	1							
34	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	103	119	134	146	153	147	124	86	42	11	1						
35	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	121	138	154	168	173	164	138	93	44	12	1					
36	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	140	159	178	191	195	184	151	100	47	12	1				
37	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	141	162	184	203	217	220	204	165	108	49	12	1			
38	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	142	164	188	211	232	247	247	227	182	116	52	13	1		
39	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	142	165	190	216	242	265	279	277	252	198	125	55	13	1	
40	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64	76	89	104	122	142	165	191	219	248	277	301	314	310	278	216	134	57	13	1

Figura 1: Tabela para $q\omega(q)$

Lema 1.1. *Dado $n > 0$, o número de matrizes cuja soma é* $\left\{ {n-j \atop j} \right\}$, $j \geq 1$, *e é da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \tag{1}$$

com as restrições:

$$\begin{gathered} c_s = 1, \\ c_t = c_{t+1} + 2d_{t+1}, \\ \sum d_i = j, \\ n = \sum c_t + \sum d_t. \end{gathered} \tag{2}$$

é igual ao coeficiente de x^{n-j} na expansão de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots(1-x^{2j+1})}.$$

Ou ainda, fixado $j \geq 1$, seja $P_{2j+1}(k)$ o número de partições de k em partes ímpares menores que do que ou iguais a $2j+1$, então

$P_{2j+1}(n-(j+1)) =$ *ao número de matrizes cuja soma é* $\left\{ {n-j \atop j} \right\}, n > j.$

Demonstração. De fato, dada uma matriz da forma (1) podemos associar a partição $c_1 + c_2 + \cdots + c_{s-1}$ em partes ímpares menores do que ou iguais a $2j+1$ de $n-(j+1)$. Reciprocamente, dada uma partição $\lambda_1 + \cdots + \lambda_j$ em partes ímpares menores do que ou iguais a $2j+1$, em ordem não-crescente, podemos construir a matriz

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0220

© 2015 SBMAC

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_j & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_j & d_{j+1} \end{pmatrix}$$

em que $d_{j+1} = \dfrac{\lambda_j - 1}{2}$, $d_{i+1} = \dfrac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{2}$ e $d_1 = j - \sum_{h=2}^{j+1} d_h$. □

Proposição 1.1. *Dado $m \geq 1$, considere $p_d(m)$ o número de partições de m em partes distintas. Então*

$$p_d(m) = \#\begin{Bmatrix} m+1 \\ w \end{Bmatrix}, \text{ com } w \geq \left\lfloor \tfrac{m-1}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Considere $m \geq 1$, para cada partição de m em partes distintas existe uma partição $c_1 + c_2 + \cdots + c_{s-1}$ em partes ímpares correspondente. Como demonstrado no Lema (1.1) esta partição pode ser associada à matriz

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{s-1} & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}$$

com $\sum_{i=1}^{s} d_i = w, w \geq \left\lfloor \dfrac{m-1}{2} \right\rfloor$.

Do mesmo modo, dada uma matriz cuja soma é $\begin{Bmatrix} m+1 \\ w \end{Bmatrix}$, ela pode ser associada, pelo Lema (1.1), a uma partição de m em partes ímpares menores do que ou iguais a $2w+1$.

Se m é ímpar então $\left\lfloor \dfrac{m-1}{2} \right\rfloor = \dfrac{m-1}{2}$ e portanto $2w+1 \geq m$. Caso contrário, teremos $\left\lfloor \dfrac{m-1}{2} \right\rfloor = \dfrac{m-2}{2}$ e então $2w+1 \geq m-1$, e como m é par, segue em ambos os casos, que temos partições em partes ímpares irrestritas. Mas como para cada partição de m em partes ímpares temos uma partição em partes distintas segue o resultado. □

2 Mock Theta Function $f_0(q)$

A função geradora para $f_0(q)$, segundo [4], é

$$f_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q;q)_n}$$

e a restrição que caracteriza a matriz de duas linhas correspondente é

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \ c_s = 1.$$

Esta função tem um peso associado, dado por $(-1)^{\sum_{t=1}^{s} d_t}$.

Considere a tabela da Mock Theta Function $f_0(q)$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0220 © 2015 SBMAC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	1																																							
2	-1	0																																						
3	1	0	0																																					
4	-1	0	0	1																																				
5	1	0	0	-1	0																																			
6	-1	0	0	1	-1	0																																		
7	1	0	0	-1	1	0	0																																	
8	-1	0	0	1	-1	1	0	0																																
9	1	0	0	-1	1	-1	0	0	1																															
10	-1	0	0	1	-1	1	-1	0	-1	0																														
11	1	0	0	-1	1	-1	1	0	1	-1	0																													
12	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0																												
13	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	2	0	0																											
14	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	1	-2	1	0	0																										
15	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-1	2	-2	1	0	0																									
16	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-2	2	-2	0	0	1																								
17	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	2	-2	3	-1	0	-1	0																							
18	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	2	-3	2	-1	1	-1	0																						
19	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-2	3	-3	2	-1	1	-1	0																					
20	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-3	3	-3	2	-1	2	-1	0																				
21	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	3	-3	4	-3	2	-2	2	0	0																			
22	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	3	-4	4	-3	2	-3	2	0	0																		
23	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-3	4	-5	4	-3	3	-3	1	0	0																	
24	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-4	5	-5	4	-4	4	-3	1	0	0																
25	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	4	-5	6	-5	5	-4	4	-3	0	0	1															
26	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-6	5	-5	5	-2	0	-1	0														
27	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-7	7	-6	6	-6	4	-1	1	-1	0													
28	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-6	7	-8	7	-7	7	-6	4	-2	1	-1	0												
29	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	6	-7	9	-8	8	-8	7	-6	4	-1	2	-1	0											
30	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	7	-9	9	-9	9	-9	8	-7	3	-2	2	-1	0										
31	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-7	9	-10	10	-10	10	-9	9	-6	3	-3	3	0	0									
32	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-9	10	-11	11	-11	11	-11	9	-6	4	-4	2	0	0								
33	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	9	-10	12	-12	12	-12	13	-11	9	-6	5	-4	2	0	0							
34	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-10	10	-12	13	-13	13	-15	13	-12	10	-7	5	-5	1	0	0						
35	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	10	-10	12	-14	14	-14	16	-15	14	-13	10	-7	7	-4	1	0	0					
36	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-10	11	-12	14	-15	15	-17	17	-17	16	-14	10	-9	7	-4	0	0	1				
37	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	10	-11	12	-14	16	-16	18	-18	19	-18	17	-14	12	-9	8	-3	0	-1	0			
38	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	6	-7	8	-10	11	-13	14	-16	17	-19	19	-21	21	-20	18	-16	12	-11	7	-2	1	-1	0		
39	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	10	-11	13	-14	16	-18	20	-20	22	-23	23	-21	20	-16	14	-11	7	-2	1	-1	0	
40	1	0	0	-1	1	-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-6	7	-8	-10	11	-13	15	-16	18	-21	21	-23	25	-26	24	-24	21	-18	15	-12	6	-2	2	-1	0

Figura 2: Tabela para $f_0(q)$

Quando calculamos todas as matrizes possíveis e fazemos seu gráfico de Ferrers, observamos que cada partição não possui pontos à direita do quadrado de Durfee, e além disso, para cada inteiro $2n-4$, existem exatamente $n-4$ partes abaixo do quadrado de Durfee. Isto nos sugere o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *O número de partições de um inteiro positivo $2n-4$ que não possuem pontos à direita do quadrado de Durfee e possuem exatamente $n-4$ partes abaixo do quadrado de Durfee é igual ao número de matrizes de duas linhas na forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} c_k &= 1, \\ c_t &= 2 + c_{t+1} + d_{t+1},\ t < k \\ \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i + d_i &= 2n-4; \\ \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i &= n; \\ \textstyle\sum_{i=1}^{k} d_i &= n-4. \end{aligned} \tag{3}$$

Demonstração. A prova deste teorema segue de modo análogo ao Corolário C em [2]. É suficiente construir uma bijeção do conjunto de partições de $2n-4$ com as restrições descritas no Teorema (2.1) e o conjunto de matrizes da forma (3), em que associa a cada $k \geq 1$ fixado, uma partição de $2n-4$ com nenhum ponto à direita do quadrado de Durfee de lado k a uma matriz com as restrições (3), contendo exatamente k colunas de forma que d_1 é o número de partes iguais a 1

 © 2015 SBMAC

abaixo do quadrado de Durfee, d_2 é o número de partes iguais a 2 abaixo do quadrado de Durfee e assim por diante.

Por exemplo, uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r$ (suponha $\lambda_t \geq \lambda_{t+1}$) com quadrado de Durfee de lado 3 é completamente caracterizada, uma vez que for declarado quantas vezes cada um dos números 1, 2 e 3 aparece como parte de λ. Seja

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

uma matriz. Por (3) é possível escrever

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 \\ c_2 &= 3 + d_3 \\ c_1 &= 5 + d_2 + d_3, \end{aligned} \tag{5}$$

Portanto, a matriz (4) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 5 + d_2 + d_3 & 3 + d_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ou, ainda, como a soma

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Da discussão anterior, segue que a partição λ pode ser caracterizada pelos números
$d_1 \rightarrow$ o número de vezes que 1 é uma parte de λ
$d_2 \rightarrow$ o número de vezes que 2 é uma parte de λ
$d_3 \rightarrow$ o número de vezes que 3 é uma parte de λ. $\square$

Exemplo 2.1. *Dada a matriz* $\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, *podemos associá-la ao gráfico de Ferrers com quadrado de Durfee de tamanho* 3 *e tendo* 8 *partes de tamanho* 2 *e* 5 *partes de tamanho* 1.

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$$

Observamos que até um certo ponto os valores vão se repetindo de uma linha para outra na tabela e a cada duas linhas um valor é acrescentado nesta sequência (sequência em azul). De acordo com Sloane [6], esta é a sequência das partições balanceadas de n.

Definição 2.1. *Uma* ***partição balanceada*** *de um inteiro positivo n é aquela em que a última parte é igual ao número de partes.*

Lema 2.1. *Seja n inteiro positivo e λ uma partição de n balanceada com quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Então a partição conjugada de λ tem um número menor do que ou igual a $n-4$ partes abaixo do quadrado de Durfee.*

Demonstração. Considere n um inteiro positivo, e λ uma partição balanceada de n,com quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$.

Se $k = 1$ nada temos a fazer, pois somente para $n = 1$ é possível ter uma partição balanceada.

Considere $k \geq 2$. Como $n - k^2 \leq n - 2^2 = n - 4$, além do quadrado de Durfee de tamanho k^2, resta um número menor do que ou igual a $n-4$ de pontos na partição conjugada de λ. □

Baseado na observação e no lema anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *O número de* ***partições balanceadas*** *de um inteiro positivo $n \geq 7$ é igual ao número de matrizes de duas linhas na forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_k \end{pmatrix},$$

em que

$$c_k = 1,$$

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, t < k$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i + d_i = 2n - 4;$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i = n;$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = n - 4.$$

Demonstração. Seja $n \geq 7$ inteiro positivo e λ uma partição balanceada de n com quadrado de Durfee de tamanho $k \geq 1$. Então conjugamos a partição λ, deslocamos as partes abaixo do quadrado de Durfee uma posição para a direita e completamos com uma coluna de tamanho $n-4$. Observe que é possível completar, pois o Lema (2.1) garante que existe um número menor do que $n-4$ partes abaixo do quadrado de Durfee e nenhuma dessas partes é igual ao tamanho do quadrado, pela definição de partição balanceada. Desta forma construímos uma partição de $2n-4$, sem pontos à direita do quadrado de Durfee, que pelo Teorema (2.1) está associada a uma matriz do tipo (3).

Reciprocamente, dada uma matriz da forma (3), podemos associar a partição de $2n-4$ com exatamente $n-4$ partes abaixo e sem nenhum ponto à direita do quadrado de Durfee, a uma partição de n também com quadrado de Durfee de tamanho k. Primeiro retiram-se $n-4$ pontos, um ponto de cada parte abaixo do quadrado de Durfee na representação de Ferrers da partição de $2n-4$ e depois conjuga-se a partição. Portanto o número de partes é exatamente o tamanho do quadrado de Durfee e é igual à menor parte, o que resulta numa partição balanceada de n. □

Existem inúmeros resultados que podem ser obtidos e demonstrados combinatoriamente através desta nova estatítisca.

 © 2015 SBMAC

Referências

[1] G.E. Andrews; *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2004..

[2] E.H.M. Brietzke, J.P.O. Santos, R. Silva, *Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions*, The Ramanujan Jornal, V23, p. 265-295, 2010.

[3] E.H.M. Brietzke, J.P.O. Santos, R. Silva, *A new approach and generalizations to some results about mock theta functions* , Discrete Mathematics, v. 311, p. 595-615, 2011.

[4] E.H.M. Brietzke, J.P.O. Santos, R. Silva, *Combinatorial interpretations as two-line array for the mock theta functions*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (Impresso), v. 44, p. 233-253, 2013.

[5] J.P.O. Santos, P. Mondek, A.C. Ribeirto, *New Two-Lines Arrays Representing Partitions*, Annals of Combinatorics, v. 15, p. 341-354, 2011.

[6] https://oeis.org/

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0220

© 2015 SBMAC