Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparação de Métodos Numéricos para o Sistema de Saint-Venant-Exner

Thiago F. C. Carrenho[1], Lucas F. M. Oliveira[2], Maicon R. Correa[3]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP

No contexto de simulações de hidrodinâmica, as equações de águas rasas são objeto de estudo extensivo, sendo conhecidos diversos métodos numéricos para a aproximação de sua solução. Neste cenário, buscamos conhecer a eficiência de uma adaptação proposta por [3] de um desses métodos, a fim de que considere erosão, onde os perfis da água e do solo se alteram com o tempo.

Considere um canal natural com fluxo de água majoritário em uma direção, cujo comprimento é significativamente maior que sua profundidade (hipótese de águas rasas), e que o leito deste canal é erodível. Neste caso, o fluxo da água pode ser modelado pelas equações de Saint-Venant [2] (forma unidimensional das equações de águas rasas), e o fluxo de sedimentos a nível do leito pela equação de Exner, gerando o sistema Saint-Venant-Exner [3]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = -gA\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{n_{\mathrm{M}}^2|Q|}{AR^{4/3}}Q\right), \tag{1b}$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q_b(v)}{\partial x} = 0, \tag{1c}$$

onde $x\,[\mathrm{m}] \in \Omega = [x_l, x_r]$ e $t\,[\mathrm{s}] \in I = [t_0, t_f]$ são as variáveis de espaço e tempo, a área molhada $A(x,t)\,[\mathrm{m}^2]$ e a vazão $Q(x,t)\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$ são as quantidades conservadas, as quais buscamos a solução em todo o ponto do domínio $\Omega \times I$. A aceleração da gravidade é $g\,[\mathrm{m/s}^2]$, $z_b\,[\mathrm{m}]$ e $z\,[\mathrm{m}]$ são a cota do leito e a altura d'água em relação a um horizonte de referência, $n_{\mathrm{M}}\,[\mathrm{s/m}^{1/3}]$ o coeficiente de rugosidade de Manning, que controla a força do atrito, e $R\,[\mathrm{m}]$ o raio hidráulico, razão entre a área molhada e o perímetro molhado. Por fim, temos $q_b = A_g v^3\,[\mathrm{m}^2/s]$ o fluxo de sedimentos por unidade de largura, que depende da velocidade média do fluxo de água $v\,[\mathrm{m/s}]$ e de um coeficiente empírico $A_g\,[-]$.

Para simular a dinâmica de tal sistema, resolvemos estas equações por meio de uma adaptação do método de Ying-Khan-Wang (YKW), que originalmente é um método de volumes finitos conservativo de dois passos e bem balanceado de características *Upwind* para a resolução das equações de Saint-Venant, acoplando a ele um terceiro passo que resolva a equação de Exner.

Este método consiste em três passos a cada evolução temporal, resolvendo por primeiro a evolução da área,

$$A_i^{n+1} = A_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}(Q_{i+1-k}^n - Q_{i-k}^n), \tag{2}$$

onde $\mathbf{u}_i^n$ é o valor aproximado de $\mathbf{u}$ avaliado na célula $c_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}]$, cujo centro é x_i, no

[1] t224831@dac.unicamp.br
[2] l239956@dac.unicamp.br
[3] maicon@ime.unicamp.br

instante de tempo t^n. No segundo passo, obtemos os valores de Q em t^{n+1} por

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left(\frac{\left(Q_{i+1-k}^n\right)^2}{A_{i+1-k}^n} - \frac{\left(Q_{i-k}^n\right)^2}{A_{i-k}^n}\right) + \\ + \Delta t\left(-gA_i^{n+1}\left[w_{\text{down}}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)_{\text{down}} + w_{\text{up}}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)_{\text{up}}\right] - g\frac{n_{\text{M}}^2 Q_i^n |Q_i^n|}{A_i^n (R_i^n)^{4/3}}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

sendo k um coeficiente que controla a característica *Upwind* do método, sendo 1 em fluxos da esquerda para direita, 0 para fluxos contrários, e $\frac{1}{2}$ quando não há direção definida, w_{down} e w_{up} pesos ponderados nas aproximações *downwind*, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)_{\text{down}}$, e *upwind*, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)_{\text{up}}$, de $\frac{\partial z}{\partial x}$, e, consequentemente, o termo entre parênteses é também uma aproximação.

Por fim, o terceiro passo é a atualização da cota do leito que, em casos de velocidade de fluxo de água positiva, é dada por

$$z_{b_i}^{n+1} = z_{b_i}^{n} - \Delta t \frac{q_{b_i}^{n+1} - q_{b_{i-1}}^{n+1}}{\Delta x}. \tag{4}$$

Neste trabalho, realizamos simulações de fluxo de água com erosão do leito pelo método YKW adaptado e comparamos as soluções obtidas com os resultados de métodos clássicos, como o método de Lax-Friedrichs Local [5] e métodos de Galerkin Descontínuo [4]. Os resultados indicam que o método YKW fornece soluções estáveis e precisas, particularmente em experimentos nos quais a dinâmica atinge um estado de equilíbrio. Em tais cenários, traçamos comparações com soluções analíticas obtidas segundo a metodologia proposta em [1].

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado sob apoio financeiro da FAPESP, processo nº 2024/16306-9, e com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] C. Berthon, S. Cordier, O. Delestre e M. H. Le. "An analytical solution of the shallow water system coupled to the Exner equation". Em: **Comptes Rendus Mathematique** 350 (2012). ISSN: 1631-073X. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.crma.2012.01.007`.

[2] E. G. Birgin, M. R. Correa, V. A. González-López, J. M. Martínez e D. S. Rodrigues. "Randomly Supported Variations of Deterministic Models and Their Application to One-Dimensional Shallow Water Flows". Em: **Journal of Hydraulic Engineering** (2024). DOI: `10.1061/JHEND8.HYENG-13748`.

[3] T. F. C. Carrenho. "Métodos numéricos para o sistema de águas rasas acoplado à equação de Exner". Dissertação de mestrado. IMECC/Unicamp, 2024.

[4] A. Khan e W. Lai. **Modeling Shallow Water Flows Using the Discontinuous Galerkin Method**. CRC Press, 2014. ISBN: 9780429157936. DOI: `10.1201/b16579`.

[5] A. Kurganov. "Finite-volume schemes for shallow-water equations". Em: **Acta Numerica** 27 (2018). DOI: `10.1017/S0962492918000028`.