Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos de Reflexão Circuncentrada com aleatoriedade

Pedro A. Testoni Junior[1] Luiz-Rafael Santos[2]
Universidade Federal de Santa Catarina

Neste estudo, exploramos métodos para resolução de sistemas de equações lineares (SL) baseados em simples projeções nos hiperplanos que definem tal sistema. Os sistemas de interesse aqui surgem em diversas aplicações, como é o caso da reconstrução de imagens em tomografia computadorizada, localização de sensores, processamento de sinal, entre outros.

Formalmente, considere o SL $Ax = b$, em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Podemos reescrever este problema com um problema de viabilidade linear convexa, que consiste em encontrar um ponto $\bar{x} \in S \coloneqq \bigcap_{i\in I} H_i$, em que cada $H_i \coloneqq \{x \in \mathcal{H} \mid \langle a_i, x\rangle = b_i\}$ é um hiperplano, a_i representa a i-ésima linha da matriz A e b_i representa a i-ésima entrada do vetor b.

Os métodos baseados em projeções são bem conhecidos para a resolução de SLs, como é o caso dos métodos Kaczmarz (projeções alternadas), Douglas-Rachford [2], e mais recentemente o método de Reflexões Circuncentradas (CRM) [3]. Embora calcular a projeção de um ponto x diretamente em S seja uma tarefa complexa, a projeção em cada H_i é mais simples e, no caso dos sistemas lineares, tem uma fórmula fechada dada por $\mathcal{P}_{H_i}(x) = x - \frac{\langle a,x\rangle - b}{\|a_i\|^2} a_i$. Aqui usaremos a notação $\mathcal{P}_i \coloneqq \mathcal{P}_{H_i}$ para o operador de projeção , e o mesmo para o operador reflexão $\mathcal{R}_i \coloneqq \mathcal{R}_{H_i} = 2P_{H_i} - \mathrm{Id}$.

Novas variantes de métodos baseados em projeções apresentam modificações que utilizam a aleatoriedade na escolha do hiperplano H_i a ser projetado, as quais mostram em bons resultados em relação à velocidade de convergência dos métodos. Este estudo propõe uma aceleração para o método Randomized r-sets Douglas-Rachford (RrDRM) proposto em 2024 (veja [6]), que por sua vez apresentou uma variante, com uso da aleatoriedade, para o método cíclico r-sets DR (veja [1]).

Dado $x^k \in \mathbb{R}^n$, o método RrDRM calcula o próximo iterado da seguinte forma:

$$x^{k+1}_{RrDRM} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id} + \mathcal{R}_{i_{k_r}}\mathcal{R}_{i_{k_{r-1}}}\dots\mathcal{R}_{i_{k_1}}\right)x^k, \tag{1}$$

em que cada $H_{i_{k_j}}$, com $j = \{1, \dots, r\}$, é escolhido de acordo com uma probabilidade p_i.

Neste trabalho, usamos a ideia de circuncentros generalizados de [4, 5], o qual será aplicado na iteração (1). Dado um conjunto finito de pontos, $W \coloneqq \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$, o circuncentro de W, denotado por $\mathcal{C}(W) \in \mathbb{R}^n$, é o ponto que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{C}(W) \in \operatorname{aff}\{W_x\}$, espaço afim gerado por W;

2. $\mathcal{C}(W)$ é equidistante dos pontos de W, i.e., $\|\mathcal{C}(W)-x_1\| = \|\mathcal{C}(W)-x_2\| = \cdots = \|\mathcal{C}(W)-x_m\|$.

Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de pontos de interesse será dado através de reflexões sucessivas sobre H_i, denotado por $W_x \coloneqq \{x, \mathcal{R}_{k_1}(x), \mathcal{R}_{k_2}\mathcal{R}_{k_1}(x), \dots, \mathcal{R}_{k_r}\cdots\mathcal{R}_{k_1}(x)\}$. Em [4, Lemma 3.1] foi apresentado e provado que na resolução de sistemas lineares consistentes, o circuncentro é o ponto de $\operatorname{aff}\{W_x\}$ mais próximo do conjunto solução S, ou seja, $\mathcal{P}_S(x) = C(W_x)$.

O método proposto neste trabalho, na resolução de sistemas lineares, calcula o próximo iterado da seguinte forma:

$$x^{k+1}_{RrCRM} = \mathcal{C}(W_{x^k}).$$

[1] juninhotestoni@gmail.com
[2] l.r.santos@ufsc.br

A novidade vem do fato de que, assim como no RrDRM, cada $H_{i_{k_j}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_{i_{k_j}}, x\rangle = b_{i_{k_j}}\}$ é escolhido de acordo com uma probabilidade p_i.

Sob estas hipóteses, mostramos que o método proposto converge, em esperança, conforme o seguinte resultado.

Theorem 1. *Seja $Ax = b$ um sistema linear consistente com conjunto solução S de tamanho $m \times n$. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, defina $\bar{x} = \mathcal{P}_S(z)$ e suponha que x^k_{RrCRM} seja ponto calculado pelo método RrCRM na iteração k com probabilidade $p_i = \|a_i\|^2/\|A\|_F^2$ e $x^0 := z$. Então, vale que*

$$\mathbb{E}[\|x^k_{RrCRM} - \bar{x}\|^2] \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{\sigma^2_{\min}(A)}{\|A\|_F^2}\right)^r\right)^k \|z - \bar{x}\|^2,$$

em que $\sigma_{\min}(A)$ é o menor valor singular de A e $\|A\|_F$ representa a norma de Fröbenius de A.

Como consequência deste resultado, um caso particular do estudo, temos uma variante aleatória do método de circuncentros por blocos Block-wise CRM [5], o qual denominamos RBwCRM.

Os resultados numéricos suportam a teoria de convergência dos métodos propostos. A comparação com os outros métodos é feita avaliando o custo computacional em termos de tempo de execução e número de operações realizadas, com ênfase no número de projeções (custo principal do algoritmo). Neste caso, verificamos que RrCRM e RBwCRM é mais rápido e utiliza menos projeções que RrDRM bem como que o método de aleatório de Kaczmarz, tanto em exemplares de testes gerados de maneira sintética, quanto em sistema lineares advindos de aplicações.

Agradecimentos

PATJ e LRS agradecem o apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

[1] F. J. A. Artacho, Y. Censor e A. Gibali. **The Cyclic Douglas-Rachford Algorithm with r-Sets-Douglas-Rachford Operators**. Jul. de 2018. eprint: 1801.00480 (math).

[2] H. H. Bauschke e J. M. Borwein. “On Projection Algorithms for Solving Convex Feasibility Problems”. Em: **SIAM Review** 38.3 (set. de 1996), pp. 367–426. ISSN: 0036-1445, 1095-7200. DOI: 10.1137/s0036144593251710.

[3] R. Behling, Y. Bello-Cruz e L.-R. Santos. “Circumcentering the Douglas–Rachford Method”. Em: **Numerical Algorithms** 78.3 (jul. de 2018), pp. 759–776. ISSN: 1572-9265. DOI: 10.1007/s11075-017-0399-5. arXiv: 1704.06737.

[4] R. Behling, Y. Bello-Cruz e L.-R. Santos. “On the Linear Convergence of the Circumcentered-Reflection Method”. Em: **Operations Research Letters** 46.2 (mar. de 2018), pp. 159–162. DOI: 10.1016/j.orl.2017.11.018. arXiv: 1711.08651.

[5] R. Behling, Y. Bello-Cruz e L.-R. Santos. “The Block-Wise Circumcentered–Reflection Method”. Em: **Computational Optimization and Applications** 76.3 (jul. de 2020), pp. 675–699. DOI: 10.1007/s10589-019-00155-0. arXiv: 1902.10866.

[6] D. Han, Y. Su e J. Xie. “Randomized Douglas–Rachford Methods for Linear Systems: Improved Accuracy and Efficiency”. Em: **SIAM Journal on Optimization** 34.1 (mar. de 2024), pp. 1045–1070. ISSN: 1052-6234, 1095-7189. DOI: 10.1137/23M1567503.