

# Método Multigrid para Equações Elípticas e Análise de Convergência

Anderson C. Santos<sup>1</sup>

Departamento de Física - ICEx - UFF, Volta Redonda, RJ

Wellington C. Jesus<sup>2</sup>

Departamento de Matemática - ICEx - UFF, Volta Redonda, RJ

O método Multigrid (MG) está entre os métodos iterativos mais eficientes para equações diferenciais parciais discretas. Inicialmente projetados para equações elípticas, os métodos MG foram amplamente adotados para resolver inúmeros problemas graças ao seu custo de computação ideal que é escalonado linearmente em relação ao número de nós computacionais para matrizes esparsas, superando muitos outros métodos numéricos [4]. O método é baseado em dois princípios fundamentais: suavização de erro e correção em malha grossa. O método MG combina processamento em múltiplos níveis de discretização, transferência de informação entre malhas via operadores de restrição e prolongamento [3]. A implementação eficiente de algoritmos MG para equações elípticas requer ferramentas robustas de análise de convergência. Embora muitos códigos executem sem erros aparentes, sua eficiência e acurácia prática frequentemente fica abaixo das expectativas teóricas. Este trabalho apresenta a análise de modo local como metodologia fundamental para avaliar e prever o desempenho desses métodos iterativos. O ponto de partida tradicional para análise de convergência envolve o cálculo do raio espectral (o maior valor absoluto dos autovalores) da matriz de iteração correspondente, também conhecido como o fator de convergência assintótico. Paralelamente, o conceito de fator de suavização (representando o maior fator de atenuação dos modos de alta frequência do erro em cada iteração de relaxação) foca especificamente nos modos oscilatórios do erro. Contudo, a abordagem baseada em autovalores mostra-se computacionalmente proibitiva para problemas complexos, limitando sua aplicabilidade prática. A análise de modo local (também conhecida como análise de modos normais ou análise de Fourier), desenvolvida pioneiramente por Achi Brandt [1], supera essas limitações através de uma abordagem inovadora. A principal importância do fator de suavização é que ele separa o projeto da relaxação (método iterativo) no interior do domínio de todas as outras questões algorítmicas. Além disso, estabelece um valor ideal para o qual o desempenho do algoritmo completo pode ser posteriormente avaliado. Esta técnica baseia-se em três princípios fundamentais [2]: supor que o processo é local (cada incógnita é atualizada usando informações de vizinhos próximos), que o domínio é infinito (como o processo é considerado um processo local, as condições de contorno podem ser desconsideradas durante as iterações de relaxação nos pontos internos) e que a relaxação seja um processo linear com matriz associada denotada por  $R$ . Denotando-se  $e^{(m)}$  o erro algébrico no  $m$ -ésimo passo da relaxação, com evolução sob a ação de  $R$  descrita por  $e^{(m+1)} = Re^{(m)}$ . A abordagem da análise de modo local é assumir que o erro consiste em *modos de Fourier* e determinar como a relaxação atua sobre esses modos. Os modos de Fourier, [2], têm a forma  $w_j = \sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right)$ , onde o número de onda  $k$  é um número inteiro entre 1 e  $n$ . Isso significa que o termo  $\theta = \frac{k\pi}{n}$  varia aproximadamente de 0 a  $\pi$ . Com a suposição de um domínio infinito (sem fronteiras ou condições de contorno a serem

---

<sup>1</sup>andersoncorrea@id.uff.br

<sup>2</sup>wellingtonjesus@id.uff.br

satisfeitas), os modos de Fourier não precisam estar restritos a números de onda discretos. Em vez disso, considera-se modos da forma  $w_j = e^{ij\theta}$ , onde o número de onda  $\theta$  pode assumir qualquer valor no intervalo  $(-\pi, \pi]$ . A notação  $i = \sqrt{-1}$  é adotada para evitar confusão entre  $i$  e os índices da malha. O modo correspondente a um determinado  $\theta$  tem um comprimento de onda de  $\frac{2\pi h}{|\theta|}$ . Valores de  $|\theta|$  próximos de zero correspondem a ondas de baixa frequência, enquanto valores de  $|\theta|$  próximos de  $\pi$  correspondem a ondas de alta frequência. A escolha de uma exponencial complexa facilita os cálculos e leva em conta tanto os termos de seno quanto de cosseno. A análise de modo local não é completamente rigorosa, a menos que os modos de Fourier sejam autovetores da matriz de relaxação, o que, em geral, não é o caso. No entanto, essa análise é útil para os modos de erro de alta frequência, que tendem a se assemelhar muito aos autovetores da matriz de relaxação. Por essa razão, a análise de modo local é usada para estudar o efeito de suavização nos modos de alta frequência. Aplicando o método para problemas unidimensionais, assumindo que o erro no  $m$ -ésimo passo da relaxação, no ponto de malha  $j$ , consiste em um único modo da forma  $e_j^{(m)} = A(m)e^{ij\theta}$ , onde  $-\pi < \theta \leq \pi$ . O objetivo é determinar como a amplitude do modo,  $A^{(m)}$ , muda a cada varredura de relaxação. Em cada caso que consideramos, as amplitudes em passos sucessivos estão relacionadas por uma expressão da forma  $A(m+1) = G(\theta)A(m)$ , onde a função  $G(\theta)$  descreve como as amplitudes do erro evoluem, é chamada de *fator de amplificação*. Para que o método convirja, é necessário que  $|G(\theta)| < 1$  para todo  $\theta$ . A relaxação é utilizada no multigrid para eliminar os modos oscilatórios do erro, portanto, a quantidade de interesse é, na verdade, o *fator de suavização*, que é obtido restringindo o fator de amplificação,  $G(\theta)$ , aos modos oscilatórios  $\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi$ . Especificamente, definimos o fator de suavização como  $\mu = \max_{\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi} |G(\theta)|$ . Este é o fator pelo qual podemos esperar que os modos oscilatórios sejam atenuados (no pior caso) a cada varredura de relaxação. Como exemplo de aplicação, o problema modelo unidimensional  $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$  foi discretizado por diferenças finitas de segunda ordem clássico e aplicado relaxação de Jacobi ponderado. Note que o erro algébrico  $e_j$  também governado pela mesma relaxação de Jacobi ponderado. Assumindo que o erro consiste do modo anteriormente descrito ( $e_j^{(m)} = A(m)e^{ij\theta}$ ) e substituindo na expressão da discretização da relaxação de Jacobi foi obtido que o fator de amplificação é  $G(\theta) = 1 - 2\omega \operatorname{sen}^2(\theta/2)$  e o fator de suavização  $\mu = 1/3$ , isto diz que os componentes oscilatórios são reduzidos pelo menos por um fator de três com cada relaxamento. De maneira análoga foi aplicado ao problema modelo o método para a relaxação de Gauss-Seidel, obtendo-se o fator de amplificação  $G(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{2 - e^{-i\theta}}$  e o fator de suavização  $\mu = 0,45$ . A análise de modo local pode ser facilmente estendida para duas ou mais dimensões. Através da análise de modo local, podemos prever sistematicamente o desempenho de diversos esquemas de relaxação, permitindo a seleção informada do método mais adequado. Esta metodologia mostra-se particularmente valiosa na extensão para problemas multidimensionais e operadores diferenciais mais complexos, mantendo sua eficácia como ferramenta de análise e otimização de algoritmos. A versatilidade da abordagem consolida sua posição como instrumento indispensável no projeto e implementação de métodos multigrid eficientes.

## Referências

- [1] A. Brandt e O. E. Livne. **Multigrid Techniques: 1984 Guide with Applications to Fluid Dynamics, Revised Edition**. SIAM, 2011.
- [2] W. L. Briggs, V. E. Henson e S. F. McCormick. **Back Matter**. SIAM, 2000.
- [3] W. Hackbusch. **Multi-grid methods and applications**. Vol. 4. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] U. Trottenberg, C. W. Oosterlee e A. Schuller. **Multigrid methods**. Academic press, 2001.