Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Método de Newton Riemanniano Amortecido Aplicado a um Problema de Separação de Imagens

Maria C. B. dos Reis,[1] Marcio A. de A. Bortoloti[2]
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, BA

A busca pelo aprimoramento de imagens é incentivada pelas diversas aplicações em que o reconhecimento e a análise de informações visuais são fundamentais, como em sistemas de vigilância e diagnósticos médicos. Em alguns contextos, as imagens capturadas podem conter sobreposições indesejadas que dificultam a identificação de elementos. Um exemplo disso ocorre quando um quadro é fotografado através de um vidro, resultando na captação simultânea da imagem do quadro e do reflexo do vidro, [2]. Problemas dessa natureza podem ser modelados a partir de técnicas de *Independent Component Analysis* (ICA), que visam estimar componentes independentes a partir de sinais multivariados disponíveis. Esses problemas correspondem a minimização da função objetivo

$$f(Y) = -\sum_{l=1}^{N} ||\operatorname{diag}\left(Y^T A_l Y\right)||_F^2, \tag{1}$$

onde $Y \in \operatorname{St}(p,n) = \{Y \in \mathbb{R}^{n\times p} \mid Y^TY = I_p\}$, em que I_p é a matriz indentidade de ordem p, com $p \leq n$, as matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_N$ estão associadas às imagens sobrepostas, $||\cdot||_F$ é a norma de Frobenius e $\operatorname{diag}(M)$ denota a matriz diagonal cujos elementos coincidem com a diagonal principal da matriz M. Este problema é resolvido por [4] usando o método de Newton clássico, com uma estratégia de vetorização. Este método pode ser visto no Algoritmo 3.1 em [4].

Buscando garantir o decrescimento da função objetivo e obter um método mais eficiente, neste trabalho, vamos empregar o método de Newton, apresentado por [4], introduzindo a busca linear de Armijo. Essa busca fornece um comprimento de passo $\alpha_k > 0$ que deve satisfazer

$$f(Y) - f\big(R_Y(\alpha_k\eta)\big) \geq -\sigma\langle \operatorname{grad} f(Y), \alpha_k\eta\rangle, \tag{2}$$

em que $R_Y(\alpha_k\eta) = qf(Y + \alpha_k\eta)$, onde $qf(\cdot)$ denota o fator Q da decomposição QR da matriz, $\langle \operatorname{grad} f(Y), \alpha_k\eta\rangle = \alpha_k \operatorname{tr}(\operatorname{grad} f(Y)^T\eta)$, onde tr é o traço de uma matriz, $\sigma \in (0,1)$ e η pertence ao espaço tangente de $\operatorname{St}(p,n)$ em Y. Veja em [1].

Em nosso estudo, consideramos $n = 3$ imagens disponíveis em [5], conforme mostra a Figura 1. As imagens foram carregadas como matrizes e, em seguida, recortadas de modo a obter a mesma quantidade de pixels, isto é, mesma dimensão $x \times y$. Além disso, em virtude das imagens serem coloridas, foi necessário transformá-las em preto e branco.

Figura 1: Imagens originais. Fonte: [5].

[1]maria.cbritoreis@gmail.com
[2]mbortoloti@uesb.edu.br

As matrizes correspondentes a cada imagem foram vetorizadas, empilhando as colunas de cada matriz e obtendo 3 vetores I_1, I_2 e I_3 com dimensão xy correspondente as imagens selecionadas. Em seguida, esses vetores foram organizados em uma matriz $S = [I_1^T, I_2^T, I_3^T]^T$ de dimensão $n \times xy$. Por fim, calculamos a mistura $X = MS$, onde M é uma matriz aleatória, escolhida de modo que a soma dos elementos de cada linha seja igual a 1. Este produto gerou as imagens sobrepostas apresentadas na Figura 2.

Figura 2: Imagens sobrepostas. Fonte: Elaboração do autor.

A partir dessas imagens sobrepostas é possível obter aproximações das imagens originais sem qualquer informação sobre M. Uma das ferramentas usadas para isso é a função de constraste conhecida por JADE (*Joint approximate diagonalization of eigen-matrices*). Essa função é definida como a soma dos quadrados dos N culmulantes de quarta ordem. Para maiores detalhes veja [4]. Esses culmulantes fornecem informações sobre a distribuição não gaussiana destes sinais, permitindo identificar a não indepedência entre eles e, consequentemente, viabilizando a separação dos componentes misturados, [3]. Para os testes realizados, consideramos o tempo de CPU e o número de iterações, com o intuito de mostrar a eficiência do método de Newton amortecido para este problema, comparado ao método clássico.

Agradecimentos

A autora Maria Clara Brito dos Reis agradece ao Programa de Educação Tutorial Institucional da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (PETI/UESB) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] P. A. Absil, R. Mahony e R. Sepulchre. **Optimization algorithms on matrix manifolds**. 1a. ed. Princeton University Press, 2009. ISBN: 978-0-691-13298-3.

[2] H. Farid e E. H. Adelson. "Separating reflections from images by use of independent component analysis". Em: **Journal of the Optical Society of America A** 16.9 (1999), pp. 2136–2145. DOI: 10.1364/josaa.16.002136.

[3] A. Hyvärinen e E. Oja. "Independent component analysis: algorithms and applications". Em: **Neural networks** 13.4-5 (2000), pp. 411–430. DOI: 10.1016/S0893-6080(00)00026-5.

[4] H. Sato. "Riemannian Newton-type methods for joint diagonalization on the Stiefel manifold with application to independent component analysis". Em: **Optimization** 66.12 (2017), pp. 2211–2231. DOI: 10.1080/02331934.2017.1359592.

[5] L. de Vito. **ICA for Demixing Images**. Online. Acessado em: 13 de março de 2025, urlhttps://github.com/ldv1/ICA_for_demixing_images/tree/master.