Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Otimização Semidefinida para Resolução do Problema de Matriz de Correlação mais Próxima

Matias O. Schwarz[1] Gabriel Haeser[2]
IME-USP, São Paulo, SP
Daiana O. dos Santos[3]
UNIFESP, São Paulo, SP

Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica detalhada sobre otimização semidefinida, com foco no problema de programação quadrática. Inicialmente, fornece-se um embasamento teórico abrangente, abordando diferentes tipos de problemas de otimização e as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). A partir desse arcabouço teórico, utilizam-se o princípio de decomposição de Moreau e os conceitos de derivada generalizada de Clarke para desenvolver métodos de Newton Semissuave aplicados à resolução de problemas de otimização quadrática restritos ao cone $\mathbb{R}^n_+$. Em seguida, tais métodos são generalizados para problemas de otimização restritos a um cone convexo qualquer e aplicados a problemas restritos aos cones de matrizes semidefinidas positivas ($\mathbb{S}^n_+$) com restrições lineares.

Por fim, introduz-se o problema da Matriz de Correlação Mais Próxima (NCM) e demonstra-se como aplicar os métodos desenvolvidos para resolver esse problema, implementando o algoritmo de Newton Semissuave para o NCM em Python. Além disso, compara-se o desempenho do algoritmo de Newton semissuave com outros métodos clássicos da literatura, como o método de Projeções Alternadas, para essa aplicação.

Dois trabalhos recentes de Armijo, Bello-Cruz, Haeser [2] e [1], foram estudados em detalhe, sendo a base teórica deste trabalho. Em suma, eles descrevem o seguinte sistema:

$$P_{\mathcal{K}}(x) + T(x) = b, \tag{1}$$

onde $\mathcal{K} \subseteq X$ é um cone convexo fechado em um espaço vetorial normado de dimensão finita X, $P_{\mathcal{K}}(x)$ é a projeção de $x \in X$ em $\mathcal{K}$, $b \in X$, e $T : X \to X$ é um operador linear.

Entre os problemas que foram considerados, atenção especial foi dada a casos em que $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$ e $\mathcal{K} = \mathbb{S}^n_+$, respectivamente, o ortante não negativo e o espaço de matrizes semidefinidas positivas.

Uma aplicação importante da equação (1) é feita sobre o problema de programação cônica quadrática:

$$\big(\min \quad \tfrac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle q, x\rangle, \text{ s.t.} \quad x \in \mathcal{K}.\big) \tag{2}$$

Para os casos específicos relevantes em que $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$, $\mathcal{K} = \mathbb{L}^n$ e $\mathcal{K} = \mathbb{S}^n$, é sabido que para $T = (Q - Id)^{-1}$ e $b = -Tq$, a projeção nas soluções da equação (1) satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem para o problema (2). Estudamos estes resultados, que também se aplicam a problemas quadráticos incluindo restrições lineares de igualdade.

Neste projeto, focamos nossa atenção no *Método de Newton Semissuave* para resolver a equação (1). Este método encontra um zero da função $F : X \to X$,

$$F(x) := P_{\mathcal{K}}(x) + Tx - b, \qquad x \in X. \tag{3}$$

[1] matias.schwarz314@gmail.com
[2] ghaeser@ime.usp.br
[3] daiana.santos@unifesp.br

Começando em um ponto $x^0 \in X$, o método clássico de Newton Semissuave itera como:

$$x^{k+1} = x^k - \left[F'(x^k)\right]^{-1} F(x^k), \tag{4}$$

onde $F'(x^k) \in \partial F(x^k)$ é um Jacobiano generalizado. Esta iteração aplicada a (3) e escolhendo $F'(x^k) = V(x^k) + T \in \partial F(x^k)$ assume a seguinte forma simples:

$$\left(V(x^k) + T\right) x^{k+1} = b, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

onde $V(x^k) \in \partial_C P_{\mathcal{K}}(x^k)$ é um Jacobiano generalizado de Clarke da projeção.

Aplicamos (5) para o problema de matriz de correlação mais próxima que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\|X - G\|^2, \\ \text{sujeito a } & \operatorname{diag}(X) = e, \\ & X \in \mathbb{S}^n_+. \end{aligned} \tag{6}$$

Em que G é uma matriz de correlação não válida. O problema de correlação mais próxima foi amplamente estudado em diversas áreas do conhecimento, sendo suas causas também discutidas em [4]. Para resolver (6), estudamos um método desenvolvido em [1] que utiliza otimização semidefinida partindo da equação (5).

Implementamos esse método de Newton Semissuave para resolver o problema de NCM em Python e comparamos com outros métodos conhecidos da literatura, como o método de projeções alternadas desenvolvido em [3] e chegamos à conclusão que o método de Newton Semissuave é competitivo com outros algoritmos já conhecidos para essa aplicação.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP pelo financiamento do auxílio temático número 2023/08706-1 e da bolsa de iniciação científica número 2023/13586-5.

Referências

[1] N. Armijo, Y. Bello-Cruz e G. Haeser. **A semi-smooth Newton method for general projection equations applied to the nearest correlation matrix problem**. 2024. arXiv: 2401.04657 [math.OC]. URL: https://arxiv.org/abs/2401.04657.

[2] N. Armijo, Y. Bello-Cruz e G. Haeser. **On the convergence of iterative schemes for solving a piecewise linear system of equations**. Jun. de 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2206.06945.

[3] N. J. Higham. “Computing the Nearest Correlation Matrix—A Problem from Finance”. Em: **IMA Journal of Numerical Analysis** 22.3 (2002), pp. 329–343. DOI: 10.1093/imanum/22.3.329.

[4] Portfolio Optimizer. **When a Correlation Matrix is not a Correlation Matrix: The Nearest Correlation Matrix Problem**. Online. Acessado em 22/12/2024, https://portfoliooptimizer.io/blog/when-a-correlation-matrix-is-not-a-correlation-matrix-the-nearest-correlation-matrix-problem/.