Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Famílias de grafos com contorno não geodésico

Simone Dantas[1,*] **Thiago de M. D. e Silva**[2,**]
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense
24020-140, Niterói, RJ
E-mail[1]: sdantas@im.uff.br
Email[2]: thiagoomenez@gmail.com

Danilo Artigas*
Instituto de Ciência e Tecnologia
Universidade Federal Fluminense
28895-532, Rio das Ostras, RJ
E-mail: daniloartigas@puro.uff.br

RESUMO

Este trabalho contempla o estudo de conceitos de matemática contínua que podem ser estendidos para matemática discreta, em particular, teoria dos grafos. Um desses conceitos é o de convexidade geodésica.

Seja G um grafo, onde $V(G)$ é o conjunto de vértices de G e $E(G)$ é o conjunto de arestas de G. A distância entre dois vértices u e v de G é o número de arestas contidas em um caminho mínimo entre eles. A excentricidade de um vértice u de G é a maior distância entre u e qualquer outro vértice w de G. Um intervalo fechado entre dois vértices u e v de G, denotado por $I[u, v]$, é um subconjunto de $V(G)$ formado por u e v e todos os vértices que se encontram em qualquer caminho mínimo entre u e v. Dado um subconjunto S de $V(G)$, dizemos que S é convexo se $I[S] = S$. Dizemos que S é geodésico se $I[S] = V(G)$. O contorno de um grafo, $Ct(G)$, é formado pelos vértices cuja excentricidade é maior ou igual a de seus vizinhos.

O objetivo deste trabalho é estudar sobre quais condições o contorno é um subconjunto geodésico de G, e contribuir para o estimulante problema em aberto, proposto em 2005 [2], que consiste na seguinte pergunta: "$I^2[Ct(G)] = V(G)$, para todo G?".

O primeiro grafo cujo contorno não era geodésico foi exibido em 2005 [2]. Uma variação deste mesmo grafo foi apresentada em [3] (veja Figura 1). Tendo em vista a dificuldade da determinação dos vértices que pertencem a $Ct(G)$, pois a remoção ou inserção de uma aresta ou vértice pode alterar as excentricidades de todos os vértices de G, somente em 2013 [1], foi exposto outro grafo cujo contorno não era geodésico, exibido na Figura 2. Na Figura 1 os vértices a, b e c pertencem a $Ct(G)$ e na Figura 2, os vértices destacados com um retângulo pertencem a $Ct(G)$:

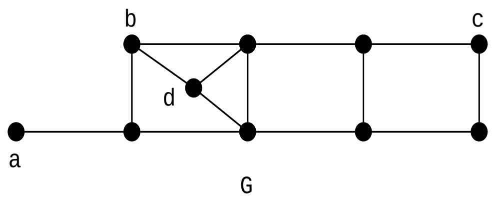

Figura 1: vértice d não pertence à I[Ct(G)]

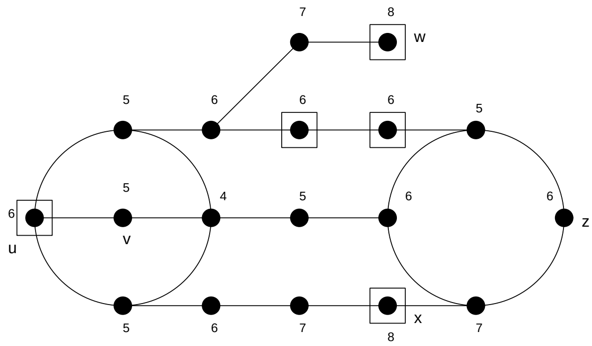

Figura 2: vértice v não pertence à I[Ct(G)]

Neste trabalho, contribuímos para o estudo deste problema apresentando generalizações de dois exemplos encontrados na literatura. Construímos três famílias infinitas de grafos cujo $Ct(G)$ não é geodésico, e duas delas são mostradas a seguir:

* Parcialmente financiado por FAPERJ, CNPq e Proppi/PDI/UFF.
** Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

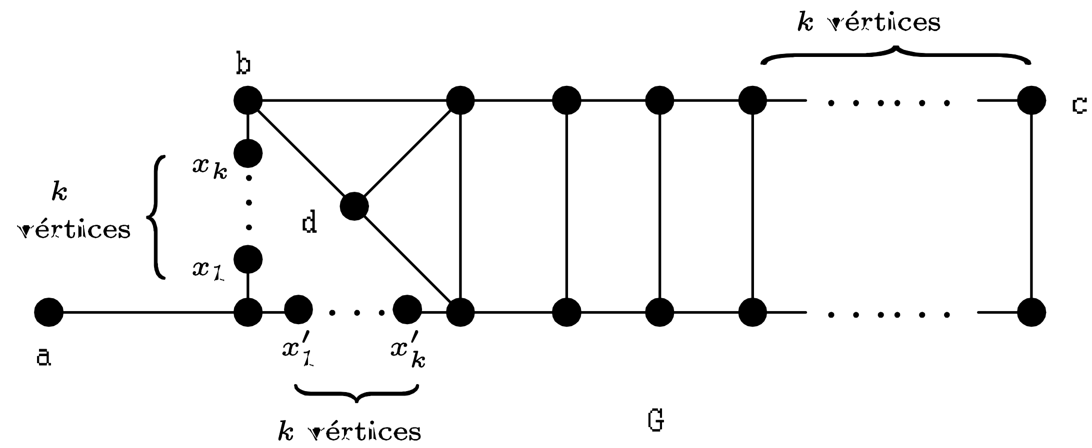

Figura 3: vértice d não pertence a I[Ct(G)]

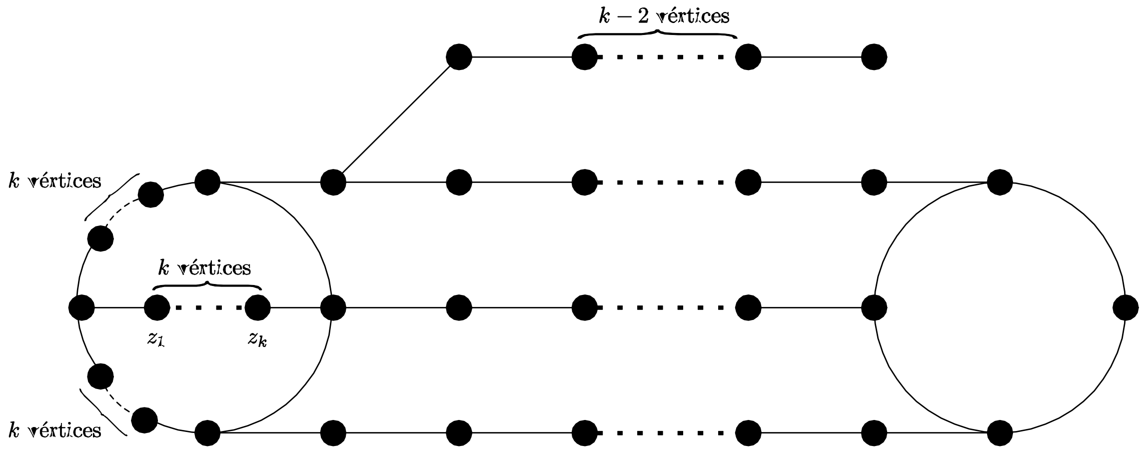

Figura 4: vértices z_i, $i \in \{1,...,k\}$, não pertencem a I[Ct(G)]

A terceira família pode ser obtida através da Figura 3, a partir da remoção de um vértice x_i ou de um vértice x'_i, $i \in \{1, ..., k\}$. Da mesma forma, d não pertencerá à $I[Ct(G)]$. A prova dessas duas generalizações pode ser feita utilizando-se o princípio de indução matemática.

Até o momento, a única propriedade conhecida é a seguinte: se um conjunto S de vértices de G é tal que $Ct(G) \subseteq S$ e $|S| \geq n-3$ então S é geodésico. Os poucos exemplos apresentados na literatura possuem $|V(G) \setminus I[Ct(G)]| = 1$ e portanto $I[I[Ct(G)]]$ é geodésico. Observamos que na Figura 4, apresentamos uma família infinita de grafos onde k vértices não pertencem ao primeiro intervalo do contorno. Logo, este é o primeiro exemplo onde $|I[Ct(G)]| < n-3$ e $I[Ct(G)]$ geodésico.

Palavras-chave: *Teoria dos grafos, convexidade em grafos, conjunto de contorno.*

Referências

[1] D. Artigas, S. Dantas, M. C. Dourado, J. L. Szwarcfiter, S. Yamaguchi, On the contour of a graph, Discrete Applied Mathematics, vol. 161, pp. 1356-1362, (2013).

[2] J. Cáceres, A. Márquez, O. R. Oellermann, M. L. Puertas, Rebuilding convex sets in graphs, Discrete Mathematics, vol. 297, pp. 26-37, (2005).

[3] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, C. Seara, Geodecity of the contour of chordal graphs, Discrete applied Mathematics, vol. 156, pp. 1132-1142, (2008).