

Bilateração e Geometria de Distâncias

Germano Abud,

Faculdade de Matemática, FAMAT, UFU, 38408-100, Uberlândia, MG.

E-mail: germano@famat.ufu.br

Jorge Alencar, Carlile Lavor,

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, DMA, IMECC, UNICAMP,
13083-859, Campinas, SP.

E-mail: jorge.fa.lima@gmail.com, clavor@ime.unicamp.br

Resumo: Em [3], os autores estabelecem uma “dualidade” entre o DGP (Problema de Geometria de Distâncias) e o EDMCP (Problema de Completamento de Matrizes de Distâncias Euclidianas). Neste trabalho, mostraremos como o teorema sobre o número de soluções (em [1, 5]) pode ser utilizado em conjunto com a bilateração, para o cálculo de certas distâncias desconhecidas. O teorema sobre número de soluções é válido para instâncias de um K DMDGP ($K \geq 1$), mas trataremos apenas do caso $K = 2$, para o qual faz sentido aplicar o método de bilateração.

Palavras-chave: Geometria de distâncias euclidianas, completamento de matrizes, bilateração

1 Introdução

Menger [6] caracterizou vários conceitos geométricos (congruência, convexidade, etc.) em termos de distâncias. Os resultados de Menger e algumas complementações apresentadas posteriormente por Blumenthal [2] deram origem a um ramo de estudo denominado Geometria de Distâncias, cujo principal problema pode ser assim enunciado:

Problema de Geometria de Distâncias (DGP¹): Dado um natural $K > 0$ e um grafo simples, ponderado, não direcionado, $G = (V, E, d)$, cujas arestas são ponderadas por uma função $d : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, determine se existe uma função $x : V \rightarrow \mathbb{R}^K$ tal que

$$\forall \{u, v\} \in E, \|x(u) - x(v)\| = d(\{u, v\}); \quad (1)$$

onde $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana. A função x em (1) é dita uma *realização* válida de G em \mathbb{R}^K .

Duas realizações x e y de um grafo G são ditas *congruentes*, se

$$\|x(u) - x(v)\| = \|y(u) - y(v)\|, \forall u, v \in V. \quad (2)$$

Em outras palavras, elas são congruentes se uma pode ser obtida a partir da outra, por uma composição de rotações, reflexões e translações.

O interesse no DGP está relacionado à riqueza de suas aplicações (conformação molecular, redes de sensores sem fio, visualização de dados e robótica, entre outros), bem como na beleza da teoria matemática envolvida [4]. Uma subclasse importante de problemas é a seguinte:

K - Problema Discretizável de Geometria de Distâncias Moleculares (K DMDGP²):
Dado um inteiro positivo K , um grafo simples, ponderado, não-direcionado, $G =$

¹Do inglês: Distance Geometry Problem

²Do inglês: Discretizable Molecular Distance Geometry Problem

(V, E, d) , onde $d : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, uma ordem $<$ em V tal que $\{u, v\} \in E$, para cada $v > K$ e $v - K \leq u \leq v - 1$ (conhecemos todas as distâncias entre quaisquer $K + 1$ vértices consecutivos), e uma realização parcial $\bar{x} : \{1, \dots, K\} \rightarrow \mathbb{R}^K$, desejamos saber se existe uma realização $x : V \rightarrow \mathbb{R}^K$, tal que

$$\forall \{u, v\} \in E \quad \|x(u) - x(v)\| = d(\{u, v\}),$$

e tal que $x(v) = \bar{x}(v)$ para cada $v \in \{1, \dots, K\}$.

Seja X o conjunto de todas as soluções (realizações válidas) de um K DMDGP. De [4], sabemos que se existe uma ordem sobre o conjunto de vértices V , tal que cada vértice v , com $v > K$, tem exatamente K predecessores adjacentes, então (com probabilidade 1) temos $|X| = 2^{n-K}$. Se existem pelo menos K predecessores adjacentes então $|X| \leq 2^{n-K}$.

No presente trabalho, trataremos da classe de problemas 2 DMDGP ($K = 2$). Vamos particionar E em dois conjuntos E_D e E_P , tais que $E_D = \{\{i, j\} \in E : |i - j| \leq 3\}$ e $E_P = E \setminus E_D$. Uma aresta em E_P é dita *aresta de poda* e uma aresta em E_D é dita *aresta de discretização*.

De acordo com as observações acima, uma maneira natural de explorar a situação é efetuar uma busca em uma árvore, que “ramifica” no vértice v , ao computar as possibilidades x_v^0 e x_v^1 e, quando possível, “poda” um ramo $x_v^\ell, \ell \in \{0, 1\}$, se existe uma aresta de poda $\{u, v\}$, cujo peso d_{uv} é incompatível com a posição x_v^ℓ . Este método é conhecido como *Branch-and-Prune (BP)* [4].

A cada passo do **BP**, podemos localizar o i -ésimo átomo em duas posições x_i e x'_i . Entretanto, alguma ou ambas as posições podem ser infactíveis, com respeito a certas restrições sobre as distâncias. A busca se ramifica em todas as posições atômicas que são factíveis com relação a todas as restrições e, se uma posição não é factível, o escopo da busca é podado. Uma importante propriedade do **BP** é que, mesmo no pior caso, onde temos um custo exponencial (mas na prática, polinomial) ele encontrará *todas* as soluções (realizações) de uma instância dada.

No EDMCP³ (Problema de Completamento de Matrizes de Distâncias Euclidianas [3]), é dada uma matriz simétrica parcial A (isto é, certas entradas de A são desconhecidas) e desejamos obter como solução um par (\bar{A}, K) , onde \bar{A} é um completamento simétrico de A e $K \in \mathbb{N}$, tais que:

- (a) \bar{A} é uma matriz de distâncias euclidianas em \mathbb{R}^K e
- (b) K é o mínimo possível.

Uma variante do EDMCP é o EDMCP $_K$, onde K é um dado inicial e desejamos obter (se possível) os completamentos possíveis \bar{A} satisfazendo a condição (a) acima.

O EDMCP $_K$ está fortemente conectado ao DGP: se x é uma realização de G , então a matriz parcial A pode ser completada em tempo polinomial e se \bar{A} é um completamento válido de A , então o grafo correspondente é uma clique e sua realização em \mathbb{R}^K pode ser encontrada em tempo polinomial [4]. Assim, obtemos uma correspondência entre as soluções do DGP e as soluções do EDMCP $_K$ associado.

Cada instância $G = (V, E, d)$ do 2 DMDGP pode ser transformada em tempo linear em uma instância de um EDMCP $_2$ (e vice versa [4]). Considerando a ordem dada, definimos a *forma padrão* da matriz parcial de distâncias euclidianas D , do EDMCP $_2$ associado, como sendo a matriz parcial $D = [d_{ij}]$, tal que d_{ij} é a distância do vértice i ao vértice j . Tal forma padrão garante que todos os elementos do conjunto $\{d_{ij} : |i - j| \leq 3\}$ são conhecidos.

Em [3], os autores exploram a possibilidade de um **BP** dual. Eles observam que grafos ponderados e matrizes parciais simétricas são “duais” um do outro. Enquanto no primal procuramos por realizações do grafo, no dual procuramos por completamentos de matrizes parciais de forma que realizações e completamentos de matrizes de distâncias também são duais um do outro.

³Do inglês: *Euclidean Distance Matrix Completion Problem*

Enquanto o BP (primal) decide sobre pontos $x_v \in \mathbb{R}^K$ que realizam o vértice v , o BP dual decide sobre distâncias desconhecidas δ associadas a v .

Vamos denotar por $CM(D)$ o determinante de Cayley-Menger [2] associado à matriz de distâncias euclidianas D . Os dois resultados abaixo (veja [2]) serão úteis mais adiante:

Proposição 1.1. Considere a matriz parcial de distâncias $D = [d_{ij}]$ abaixo, tal que a entrada $\delta = d_{14}^2$ é desconhecida:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & \delta \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ \delta & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação quadrática $CM(D) = 0$ (os valores de δ que anulam $CM(D)$) tem solução real se, e somente se, D é uma matriz de distâncias euclidianas. Neste caso, com probabilidade 1, ela tem duas soluções distintas δ^1, δ^2 que são dois valores válidos para a distância desconhecida d_{14}^2 .

Proposição 1.2. Considere uma matriz parcial $D = [d_{ij}]$ de distâncias, tal que apenas a distância d_{1n} é desconhecida, com $n \geq 5$. Façamos $\delta = d_{1n}^2 = \|v_1 - v_n\|^2$. Então, a equação quadrática $CM(D, \delta) = 0$ tem uma única solução real, que é o único valor válido para a distância desconhecida d_{1n} .

2 Número de Soluções: uma Interpretação Dual

Nesta seção, apresentaremos um resultado (em [1, 5]) sobre o número de realizações válidas de uma instância $G = (V, E, d)$ de um 2DMDGP , usando apenas o “espaço de distâncias”, ou seja, a contagem será feita a partir das matrizes parciais do $EDMCP_2$ associado. Se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ é o conjunto de todas as realizações válidas, iremos determinar a cardinalidade de X a partir da matriz parcial D do $EDMCP_2$ associado.

Seja $D = [d_{ij}]$ a matriz parcial do $EDMCP_2$ associado a um 2DMDGP dado. Devido à simetria, consideramos apenas $i \leq j$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Definição 2.1. Definimos a k -ésima diagonal (ou simplesmente k -diagonal) como a subdiagonal de D cujos elementos satisfazem $j - i = k$, para $k = 0, \dots, n - 1$. Chamaremos de (i, j) -submatriz principal de D à submatriz $\hat{D}_{i,j}$, de ordem $j - i + 1$, dada por $(d_{rs})_{r,s=i}^j$, ou seja, constituída pelas linhas $i \leq r \leq j$ e colunas $i \leq s \leq j$ de D .

Para determinar o número de completamentos para a matriz parcial D , vamos inicialmente considerar o exemplo abaixo.

Exemplo 2.2. Considere a seguinte matriz parcial de distâncias, associada a uma instância com 7 vértices:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & ? & ? & ? & ? \\ & 0 & \bullet & \bullet & ? & \bullet & ? \\ & & 0 & \bullet & \bullet & ? & ? \\ & & & 0 & \bullet & \bullet & ? \\ & & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que conhecemos a entrada $(2, 6)$ da matriz D . Logo, só teremos uma possibilidade para as entradas $(2, 5), (3, 6)$. De fato, de acordo com a Proposição 1.2 aplicada à $(2, 6)$ -submatriz principal, cada par de possibilidades para as entradas $(2, 5), (3, 6)$ geraria um valor para entrada $(2, 6)$, e tais valores são distintos com probabilidade um. Assim, só temos uma possibilidade para o par $\{(2, 5), (3, 6)\}$.

De acordo com a Proposição 1.1, obtemos ainda (via equação de Cayley-Menger) duas possibilidades para as entradas (1, 4) e (4, 7) na 3-diagonal. Aplicando a Proposição 1.2 às submatrizes principais associadas as entradas que restam, obtemos via princípio multiplicativo, duas possibilidades para cada entrada restante:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & 2 & 2 & 2 & 4 \\ & 0 & \bullet & \bullet & 1 & \bullet & 2 \\ & & 0 & \bullet & \bullet & 1 & 2 \\ & & & 0 & \bullet & \bullet & 2 \\ & & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos 4 completamentos distintos para D e, conseqüentemente, 8 realizações em \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.3. Dada uma instância de um ${}^2\text{DMDGP}$ $G = (V, E)$, com $|V| = n$, considere as distâncias d_{ij} da instância do EDMCP_2 associada, dada de acordo com a ordem em V que garante que todas as distâncias d_{ij} , com $|i - j| \leq 2$, são conhecidas (a matriz $D = [d_{ij}]$ está na forma padrão). Considere ainda, fixadas as posições dos três primeiros vértices v_1, v_2, v_3 . Assim, com probabilidade um, temos que:

1. Se não existe informação de poda, então existem apenas 2 possíveis valores reais distintos para as distâncias $d_{i,i+3}, i = 1, \dots, n - 3$, na 3-diagonal da matriz $D = [d_{ij}]$.
2. Se todas as distâncias $d_{i,i+3}, i = 1, \dots, n - 3$, na 3-diagonal são conhecidas, então existe uma única solução para o EDMCP_2 .
3. O número de possibilidades distintas para a distância d_{1n} é igual ao produto do número de possibilidades para cada elemento da 3-diagonal $d_{i,i+3}, i = 1, \dots, n - 3$.
4. Se a distância d_{1n} é conhecida, então existe apenas uma solução para o EDMCP_2 .

O resultado acima é mais geral (válido para $K \geq 1$) e pode ser encontrado em [1, 5].

3 Um pouco sobre Bilateração

Vamos denotar por p_i o vetor posição de um ponto P_i (em algum espaço euclidiano) e por $p_{i,j}$ o vetor $\vec{P_i P_j}$. Seja

$$\text{CM}(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n) = 2 \left(\frac{-1}{2} \right)^n \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d_{i_1, j_1}^2 & \dots & d_{i_1, j_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{i_n, j_1}^2 & \dots & d_{i_n, j_n}^2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

o *bideterminante de Cayley-Menger* das seqüências de pontos P_{i_1}, \dots, P_{i_n} e P_{j_1}, \dots, P_{j_n} , onde $d_{i_k, j_\ell} = \|P_{j_\ell} - P_{i_k}\|$. Quando as seqüências de pontos são as mesmas, $\text{CM}(i_1, \dots, i_n)$ denota o *determinante de Cayley-Menger* da seqüência de pontos P_{i_1}, \dots, P_{i_n} [7].

Os determinantes de Cayley-Menger podem ser usados para modelar um grande número de problemas geométricos [2]. O valor de $\text{CM}(i_1, \dots, i_n)$ é igual a $(n - 1)!^2$ vezes o quadrado do hiper-volume do simplex gerado pelos pontos P_{i_1}, \dots, P_{i_n} em \mathbb{R}^{n-1} [2]. Particularmente, a área orientada do triângulo determinado por P_i, P_j, P_k é igual a $\pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{CM}(i, j, k)}$ (o sinal depende da posição de P_k em relação à reta definida por P_i e P_j). Também é fato que $\text{CM}(i_1, i_2; j_1, j_2)$ é equivalente ao produto interno entre os vetores p_{i_1, i_2} e p_{j_1, j_2} .

A *bilateração* consiste em encontrar a posição relativa de um ponto P_k , dadas as suas distâncias a dois outros pontos P_i e P_j cujas posições são conhecidas. De acordo com [7], temos que:

$$p_{i,k} = \frac{\text{CM}(i, j : i, k)}{\text{CM}(i, j)} p_{i,j} \pm \frac{\sqrt{\text{CM}(i, j, k)}}{\text{CM}(i, j)} S p_{i,j} = \frac{1}{\text{CM}(i, j)} \left(\text{CM}(i, j; i, k) \pm \sqrt{\text{CM}(i, j, k)} S \right) p_{i,j}, \quad (4)$$

onde $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A equação (4) pode ser reescrita como:

$$p_{i,k} = Z_{i,j,k} p_{i,j}, \quad (5)$$

onde

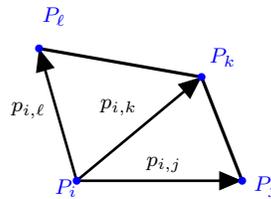
$$Z_{i,j,k} = \frac{1}{\text{CM}(i, j)} \begin{pmatrix} \text{CM}(i, j; i, k) & \mp \sqrt{\text{CM}(i, j, k)} \\ \pm \sqrt{\text{CM}(i, j, k)} & \text{CM}(i, j; i, k) \end{pmatrix} \quad (6)$$

é dita *matriz de bilateração*. Tais matrizes têm propriedades interessantes (para mais detalhes, consulte [7]) e iremos destacar uma delas: $I - Z_{i,j,k} = Z_{j,i,k}$. Elas são matrizes perpendiculares, isto é, as linhas ou colunas são vetores ortogonais de mesma norma. Para matrizes perpendiculares A, B valem as propriedades:

1. $A + B$ e AB são perpendiculares. Além disto, $AB = BA$;
2. $AA^T = A^T A = \det(A)I$, onde A^T é a transposta de A e I a matriz identidade;
3. se $v = Aw$ então $\|v\|^2 = \det(A)\|w\|^2$.

3.1 Dois triângulos com uma aresta em comum

Vamos considerar agora dois triângulos com uma aresta em comum, como na figura abaixo:



Observe que, aplicando duas bilaterações consecutivas, podemos obter $p_{i,\ell}$ em termos de $p_{i,j}$:

$$p_{i,\ell} = Z_{i,k,\ell} p_{i,k} = Z_{i,k,\ell} Z_{i,j,k} p_{i,j}. \quad (7)$$

De fato, qualquer vetor definido por dois pontos no conjunto $\{P_i, P_j, P_k, P_\ell\}$ pode ser expresso em função de $p_{i,j}$ por matrizes de bilateração. Por exemplo:

$$p_{j,\ell} = p_{i,\ell} - p_{i,j} = (Z_{i,k,\ell} Z_{i,j,k} - I) p_{i,j} \Rightarrow d_{j,\ell}^2 = \det(Z_{i,k,\ell} Z_{i,j,k} - I) d_{i,j}^2.$$

Podemos generalizar este procedimento para uma “faixa” de triângulos que compartilham uma aresta. Este é o caso típico de um grafo que representa um ${}^2\text{DMDGP}$.

3.2 Bilaterações sucessivas aplicadas ao ${}^2\text{DMDGP}$

Vamos considerar instâncias com $5 \leq n$ vértices, onde a **única informação de poda** é $d_{1,n}$, isto é, a distância do primeiro ao último vértice. Pelo teorema sobre o número de soluções, existe apenas um completamento possível para a matriz incompleta $D = [d_{ij}]$. Por enquanto, vamos desconsiderar o ramo de soluções simétricas na árvore de busca, isto é, fixamos os vértices v_1, v_2, v_3 . No nível k ($k \geq 4$), o **BP** encontra duas possíveis posições para o vértice v_k , que geram

dois valores distintos para distância desconhecida $d_{k-3,k}$. Só ocorrerá poda no último nível, após 2^{n-3} ramificações na árvore de busca.

Nosso objetivo é incorporar a bilateração ao **BP** para obter podas em todos os níveis, isto é, no nível k temos uma “parte” da única (a menos da simetria) solução do problema. No que se segue, escreveremos triângulo ijk para indicar o triângulo com vértices em v_i, v_j, v_k . Para exemplificar o procedimento que adotaremos, vamos considerar o caso $n=7$.

Inicialmente, o **BP** encontra posições para os três primeiros vértices e, no nível 4, encontra dois possíveis valores para a distância desconhecida d_{14} . Fazendo

$$p_{17} = p_{14} + p_{45} + p_{56} + p_{67} = p_{14} + (Z_{435}Z_{413}) p_{41} + (Z_{546}Z_{435}Z_{413}) p_{41} + (Z_{657}Z_{546}Z_{435}Z_{413}) p_{41} = \\ = (I - Z_{435}Z_{413} + Z_{546}Z_{435}Z_{413} - Z_{657}Z_{546}Z_{435}Z_{413}) p_{14},$$

temos que

$$d_{17}^2 = \det (I + (-I + (I - Z_{657}) Z_{546}) Z_{435}Z_{413}) d_{14}^2. \tag{8}$$

Esta última equação depende apenas das distâncias conhecidas e de d_{14} . Pelo Teorema (2.3) acima, apenas o valor correto para d_{14} satisfaz (8). Com apenas uma substituição, encontramos o valor correto de d_{14} e efetuamos a poda. Enfatizamos que na definição da matriz $Z_{i,j,k}$ em (6) temos duas possibilidades de sinal mas no cálculo do determinante em (8) temos 8 possibilidades (distintas) apenas: basta considerar a quantidade de sinais negativos no produto das matrizes de bilateração.

No próximo nível, o **BP** calcula dois pares de possibilidades (d_{25}, d_{15}) (para cada valor de d_{25} corresponde um único valor de d_{15}). Repetimos o procedimento anterior e obtemos

$$d_{17}^2 = \det (I + (-I + Z_{657}) Z_{546}Z_{514}) d_{15}^2.$$

Apenas um dentre os dois valores possíveis para d_{15} satisfaz esta equação. Assim, com apenas uma substituição, encontramos o par correto (d_{25}, d_{15}) e efetuamos a poda.

No nível 6, o **BP** calcula duas ternas de possibilidades (d_{36}, d_{26}, d_{16}) e, um valor correto determina unicamente os outros dois. Aplicando a bilateração, obtemos

$$d_{17}^2 = \det (I - Z_{617}) d_{16}^2,$$

e apenas um dentre os dois valores possíveis para d_{16} satisfaz esta equação. Assim, com apenas uma substituição, encontramos a terna correta (d_{36}, d_{26}, d_{16}) e efetuamos a poda.

No próximo nível, o **BP** encontra a solução.

3.2.1 Caso Geral:

Para $n \geq 5$ arbitrário, o **BP** determina posições para os três primeiros vértices e no nível k ($4 \leq k \leq n - 1$) calcula possibilidades para as distâncias que faltam $\{d_{ik} : 1 \leq i \leq k - 3\}$ e efetuamos a poda através de bilaterações sucessivas, como segue abaixo:

$$d_{1n}^2 = \det \left(I + \left(-I + \left(\dots + \left((-1)^{n-k+1} (I - Z_{n-1,n-2,n}) \right) \dots \right) Z_{k+1,k,k+2} \right) Z_{k,k-1,k+1} Z_{k,1,k-1} \right) d_{1k}^2. \tag{9}$$

No nível k , a equação acima envolve apenas distâncias conhecidas (e aquelas obtidas nos níveis anteriores) e a incógnita d_{1k} . Temos sempre duas possibilidades para d_{1k} , e após o teste na equação (9) encontramos o valor correto para esta distância. Neste nível, o **BP** calculou duas $(k - 3)$ -uplas de possibilidades para a coluna k : $(d_{1k}, \dots, d_{k-3,k})$. Desta forma, os demais valores desconhecidos na coluna k de D ficam unicamente determinados (Teorema 2.3) a partir do valor correto de d_{1k} .

4 Conclusões

Dada uma matriz parcial de distâncias euclidianas $D = [d_{ij}]$ associada a um 2 DMDGP, podemos usar a bilateração para reduzir a árvore de busca do **BP**. Se uma certa distância d_{ij} , $|i - j| \geq 5$ é uma informação de poda, tal que não existem informações adicionais nas colunas intermediárias $i < k < j$, então a partir do nível $i + 4$ aplicamos a equação (9) para “antecipar” a poda que só ocorreria no nível j . Desta forma, ocorrem podas em todos os níveis intermediários $i < k < j$ e, no nível j , temos apenas soluções factíveis.

O custo computacional é o mesmo do **BP** em virtude dos produtos de matrizes envolvidos, mas não armazenamos soluções infactíveis a cada nível do **BP**. A bilateração também pode ser usada para determinar a distância d_{ij} , quando conhecemos toda a 3-diagonal entre i e j , sem fazer uso de coordenadas. Num futuro próximo, pretendemos aplicar a trilateração ao problema em \mathbb{R}^3 para obter resultados semelhantes.

5 Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio da FAPESP, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

- [1] G. Abud; J. Alencar, Counting the number of solutions of the Discretizable Molecular Distance Geometry Problem. *Workshop on Distance Geometry and Applications - DGA*, 2013, Manaus.
- [2] L. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*. Oxford University Press, Oxford, 1953
- [3] L. Liberti; C. Lavor, On a relationship between graph realizability and distance matrix completion. *Optimization Theory, Decision Making, and Operations Research Applications*. Springer, p. 39-48, 2013.
- [4] L. Liberti; C. Lavor; N. Maculan; A. Mucherino, Euclidean distance geometry and applications, *SIAM Review*, v. 56, p. 3-69, 2014.
- [5] L. Liberti; C. Lavor; J. Alencar; G. Abud, Counting the number of solutions of K-DMDGP instances. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 8085, p. 224-230, 2013.
- [6] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen*, v. 100, p. 75-163, 1928.
- [7] N. Rojas; F. Thomas, The Forward Kinematics of 3-R \underline{P} R Planar Robots: A Review and a Distance-Based Formulation, *IEEE Transactions on Robotics* 27, p. 143-150, 2011.