

Análise da Disseminação Espacial da Dengue por Modelagem Matemática via Método dos Elementos Finitos

Amanda M. C. Cabral¹, Edivaldo F. F. Junior²

DEMAT/UFRRJ, Seropédica, RJ

Este estudo aborda uma pesquisa em andamento no campo de Iniciação Científica, amparada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro. O projeto de pesquisa tem como um dos objetivos explorar um modelo matemático para analisar a incidência e difusão da epidemia da dengue, durante o verão, no município de Seropédica, Rio de Janeiro. O uso de modelos matemáticos epidemiológicos, como o modelo MSIR, para prever o comportamento e a propagação espacial de doenças, facilita o processo de intervenção e controle da disseminação da doença em uma área específica, de forma a reduzir o número de indivíduos contaminados.

Neste estudo, para simular o cenário da disseminação espacial no município, utilizamos o modelo SIR modificado constituído por quatro equações diferenciais parciais (EDPs) que descrevem o comportamento de evolução da dengue por compartimentos, como mosquitos transmissores (M), indivíduos suscetíveis à doença (S), infectados (I) e recuperados (R). O modelo MSIR foi baseado na dissertação da autora Luciana Takata Gomes [1], que investiga o espalhamento da dengue usando EDPs a partir de modelos matemáticos com diferentes compartimentos:

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \nabla \cdot \alpha_M \nabla M - \nu M + \mu M = f_0 \quad (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in (0, t_s], \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot \alpha_H \nabla S + \beta M S = f_1 \quad (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in (0, t_s], \quad (2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} - \nabla \cdot \alpha_H \nabla I - \beta S M + \sigma I = f_2 \quad (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in (0, t_s], \quad (3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} - \nabla \cdot \alpha_R \nabla R - \sigma I = f_3 \quad (x, y) \in \Omega \text{ e } t \in (0, t_s], \quad (4)$$

onde as variáveis M , S , I , e R são os graus de liberdade do problema, Ω é o domínio representado pelo mapa de Seropédica, t_s o tempo de simulação e f_0 , f_1 , f_2 e f_3 são os termos fonte. Para validar a nossa implementação computacional, construímos um problema de teste a partir do sistema não-linear de EDPs (1)-(4), definindo a seguinte solução exata para tal problema:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = (M, S, I, R) = (e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y), e^{-t} \sin(\pi x) \cos(\pi y), x + y + t, e^{x+y-t}). \quad (5)$$

E, por meio de manipulações algébricas, a partir da solução (5), determinamos os termos fonte, as condições iniciais e as condições de contorno para o sistema (1)-(4). Os parâmetros $\alpha_H = \alpha_M = \alpha_R = \beta = \nu = \sigma = 1$ e $t_s = 1$ foram considerados adimensionais.

Para resolver o problema não-linear (1)-(4) com as condições de contorno e iniciais, utilizamos o Método dos Elementos Finitos (MEF) [2] para discretização espacial, o método de Crank-Nicolson [5] para discretização temporal e o método de Newton a fim de resolver um problema linear iterativamente para cada passo de tempo. A aplicação do MEF requer a discretização de Ω . Desta

¹amandamaria@ufrj.br

²edivaldofontes@ufrj.br

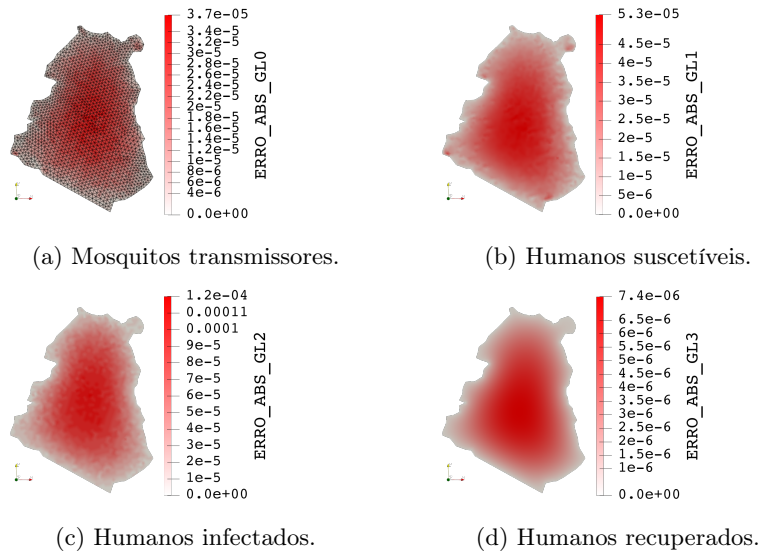


Figura 1: Erro absoluto máximo para cada grau de liberdade. Fonte: Autor.

forma, uma malha foi gerada com o *software* Gmsh [3], composta por 1660 pontos nodais e 3159 elementos triangulares, retratando o domínio espacial contínuo do mapa de Seropédica. Na Figura 1a pode-se observar a malha de triângulos com arestas na cor preta.

Na Figura 1, são apresentados os mapas de cores gerados pelo *software* ParaView [4] para os erros absolutos máximos no último passo de tempo da simulação, para cada grau de liberdade do problema. Esses erros foram definidos a partir de equações em que, para cada grau de liberdade, em valor absoluto, subtraiu-se a solução exata (5) do problema da solução aproximada pelo MEF obtida pelos autores.

Como o erro máximo da ordem de 10^{-4} está dentro do esperado para a simulação, acredita-se que a implementação do MEF foi realizada com sucesso. O próximo passo da pesquisa será simular a epidemia da dengue durante dezembro/2023 a fevereiro/2024 para a malha utilizada no exemplo, atendendo a fatores como os índices de precipitação pluviométrica, quantidade de recipientes com acúmulo de água e dados geográficos disponibilizados pela prefeitura do município.

Referências

- [1] L. T. Gomes. “Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy”. Dissertação de mestrado. Unicamp, 2009.
- [2] T. J. R. Hughes. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Mineola, New York: Dover Publications, 2000. ISBN: 9780486411811.
- [3] C. Geuzaine e J. F. Remacle. “Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. Em: **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 79.11 (2009), pp. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579.
- [4] Kitware. **ParaView: Large data visualization tool**. <https://www.paraview.org>. 2005.
- [5] A. Sundaram. “Numerical Solution for the Heat Equation Using Crank-Nicolson Difference Method”. Em: **IJRASET** 11 (2023), pp. 1051–1056. DOI: 10.22214/ijraset.2023.57262.