Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Construindo Matrizes de Árvores com Multiplicidade Máxima

Bruno S. Veloso[1], Rodrigo O. Braga[2]
UFRGS, Porto Alegre, RS

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com conjunto de vértices $V = \{v_1, ..., v_n\}$ e conjunto de arestas E. Dizemos que uma matriz simétrica $A = (a_{ij})$ de ordem $n \times n$ é associada ao grafo G se, para todo $i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$ se e somente se $\{v_i, v_j\} \in E$. Definimos $S(G)$ como o subconjunto de todas as matrizes simétricas associadas ao grafo G. Denotaremos por $Spec(A)$ o multiconjunto dos autovalores da matriz A. Definimos a multiplicidade máxima de um grafo G como

$$M(G) := \max\{m_A(\lambda) : A \in S(G), \lambda \in Spec(A)\}, \tag{1}$$

onde $m_A(\lambda)$ denota a multiplicidade de λ como autovalor da matriz A. Este parâmetro está associado a uma classe de problemas em Teoria Matricial Combinatória, denominada *Problema Inverso de Autovalor para Grafos* (ou IEP-G, do inglês *Inverse Eigenvalue Problem for Graphs*), que tem recebido atenção de pesquisadores (veja [1], por exemplo). Dado um grafo G, o objetivo é determinar todos os possíveis espectros de uma matriz $A \in S(G)$. Dentro da classe de problemas inversos, há duas questões fundamentais: a *Solubilidade* e a *Computabilidade*. A primeira diz respeito a determinar se existe uma matriz $A \in S(G)$ que seja solução para determinado problema inverso associado a G, enquanto a segunda destina-se a construir uma matriz A que seja uma solução para tal problema.

Nosso interesse concentra-se no estudo do parâmetro $M(G)$ quando G é uma árvore. Em [3] é obtida uma relação entre a multiplicidade máxima de uma árvore T e seu *número de cobertura por caminhos*, denotado por $P(T)$. O número de cobertura por caminhos de uma árvore T é o menor número de caminhos disjuntos de T que cobrem todos os vértices de T. Por [3], temos que:

$$M(T) = P(T). \tag{2}$$

Neste trabalho, vamos apresentar um método para construir matrizes simétricas de árvores com pelo menos um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de multiplicidade máxima. Para isso, faremos uso de um algoritmo apresentado em [2], que age sobre uma árvore T com pesos, onde esses pesos estão associados às entradas de uma matriz $A \in S(T)$.

Utilizando o algoritmo de [2] e uma cobertura mínima por caminhos de uma árvore, fomos capazes de construir uma matriz $A \in S(T)$ com pelo menos um autovalor $\lambda \in Spec(A)$ tal que $m_A(\lambda) = M(T)$. Além disso, nossa construção permite escolher λ com essa propriedade como qualquer número real. A Figura 1 mostra uma árvore T com pesos, com o autovalor 1, multiplicidade $3 = P(T)$ e sua cobertura mínima por caminhos em destaque. O peso em cada aresta $\{v_i, v_j\}$ representa a entrada a_{ij} da matriz $A \in S(T)$, enquanto o peso no vértice v_i indica a entrada diagonal a_{ii} de A. Observamos que as arestas com peso 1 na Figura 1 podem ter valores arbitrários como peso, sem interferir na multiplicidade máxima do autovalor 1, os quais foram escolhidos iguais a 1 por simplicidade.

[1]bruno.scaratti@ufrgs.br
[2]rbraga@ufrgs.br

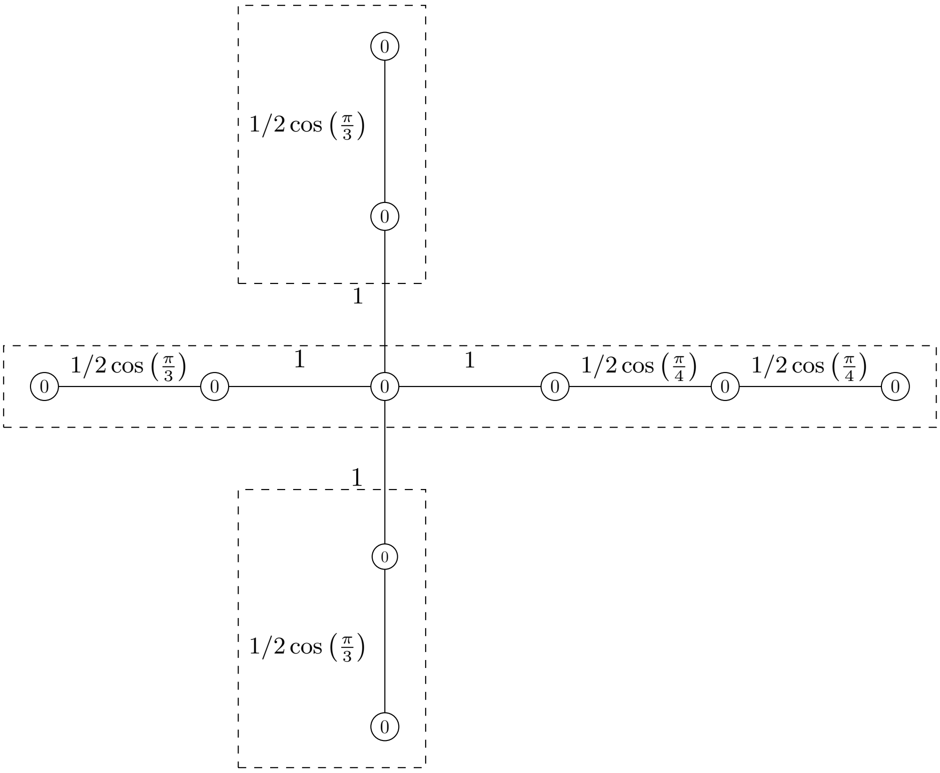

Figura 1: Árvore T com $m_A(1) = 3 = P(T)$. Fonte: Dos autores

Agradecimentos

O primeiro autor gostaria de agradecer a CAPES pelo fomento durante seu mestrado e também ao seu orientador, Prof. Dr. Rodrigo Orsini Braga.

Referências

[1] W. Barrett, S. Butler, S. M. Fallat, H. T. Hall, L. Hogben, J. C.-H. Lin, B. L. Shader e M. Young. “The inverse eigenvalue problem of a graph: Multiplicities and minors”. Em: **Journal of Combinatorial Theory, Series B** 142 (2020), pp. 276–306. ISSN: 0095-8956. DOI: 10.1016/j.jctb.2019.10.005.

[2] R. O. Braga e V. M. Rodrigues. “Locating eigenvalues of perturbed Laplacian matrices of trees”. Em: **TEMA (São Carlos)** 18.3 (2017), pp. 479–491. DOI: 10.5540/tema.2017.018.03.0479.

[3] C. R. Johnson e A. L. Duarte. “The maximum multiplicity of an eigenvalue in a matrix whose graph is a tree”. Em: **Linear and Multilinear Algebra** 46 (2007), pp. 139–144. DOI: 10.1080/03081089908818608.

