

Grafos de Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas

Catarina M. J. Sánchez,

Depto de Matemática, UFV,
36570-900, Viçosa, MG
E-mail: cmendes@ufv.br

Resumo: Neste trabalho veremos que todo grafo com pesos nos vértices pode ser associado a alguma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas, generalizando resultados de aplicações estáveis de superfícies fechada e orientadas na esfera.

Palavras-chave: Aplicações Estáveis, Grafos com Pesos, Superfícies Fechadas

1 Introdução

As aplicações estáveis entre duas superfícies fechadas e orientadas, localmente podem ser vistas como aplicações do plano no plano. O estudo de aplicações do plano no plano foi introduzido em 1955 por Whitney [10], onde determinou que um germe (pequena vizinhança do ponto) de aplicação em cada ponto é equivalente a um ponto regular ou ponto singular de dobra ou uma cúspide. Whitney também determinou que o conjunto de aplicações estáveis entre duas superfícies formam um subconjunto aberto e denso no espaço de todas as aplicações suaves.

O conjunto singular Σf de uma aplicação estável f entre duas superfícies fechadas e orientadas M e N consiste em uma coleção de curvas fechadas, disjuntas e mergulhadas sobre M e as componentes do conjunto regular, complementar de Σf em M , consiste em uma coleção de superfícies orientadas que tem como bordo as curvas singulares. A imagem de Σf , conhecido como contorno aparente, consiste em uma coleção de curvas fechadas e imersas sobre N , com possíveis interseções transversais e singularidades correspondentes às cúspides, sendo ambas em número finito.

Em [4] e [1], foi introduzido grafos com pesos nos vértices associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano, chamado de *grafo dual* de aplicações estáveis. Estes grafos classificam por completo o par $(M, \Sigma f)$ e foram estudados como invariantes topológicos de aplicações estáveis no plano em [2], de aplicações estáveis na esfera em [3] e no plano projetivo (em[6]).

O grafo de aplicações estáveis é uma ferramenta muito útil na construção de exemplos destas aplicações entre variedades e também foi estendido para aplicações de Gauss estáveis, de superfícies fechadas e orientadas imersas no 3-espaço, em [7] e para aplicações estáveis de três variedades fechadas e orientadas no 3-espaço em [8].

Na teoria de singularidades de aplicações diferenciáveis, em geral, são utilizadas ideias e técnicas das áreas de Geometria Diferencial, Análise e Álgebra para estudar o comportamento (local, semi-global e global) das singularidades, enquanto que no estudo de grafos associados às aplicações estáveis entre superfícies, em geral, as técnicas estão mais relacionados à Topologia como, por exemplo, a própria construção do grafo, que é um invariante topológico, a relação da característica de Euler entre o grafo e a superfície domínio e as cirurgias de aplicações estáveis (introduzida em [2]).

O principal resultado deste trabalho generaliza o caso das aplicações estáveis de superfícies orientadas sobre a esfera em [?] cujo enunciado é:

Teorema 4.5 *Todo grafo com pesos nos vértices pode ser associado a alguma aplicação, com grau máximo T/n , de uma superfície fechada e orientada M com gênero T sobre uma superfície fechada e orientada com gênero n .*

2 Grafos associado a aplicações estáveis entre superfícies

Denotamos por $C^\infty(M, N)$ o espaço de todas as aplicações de classe C^∞ de M em N . Duas aplicações $f, g \in C^\infty(M, N)$, são ditas \mathcal{A} -equivalente quando existem difeomorfismos $\phi : M \rightarrow N$ e $\psi : M \rightarrow N$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$, é dita **estável** se para todas aplicações suficientemente perto de f (na C^∞ -topologia de Whitney) são equivalentes a f . Segundo Whitney [10], o conjunto de todas aplicações estáveis, que denotaremos por $\mathcal{E}(M, N)$, é aberto e denso no espaço das aplicações suaves $C^\infty(M, N)$.

A Figura 1 ilustra três diferentes aplicações do toro na esfera: a primeira e a segunda (da esquerda para direita) tem grau 1 e a terceira tem grau 2.

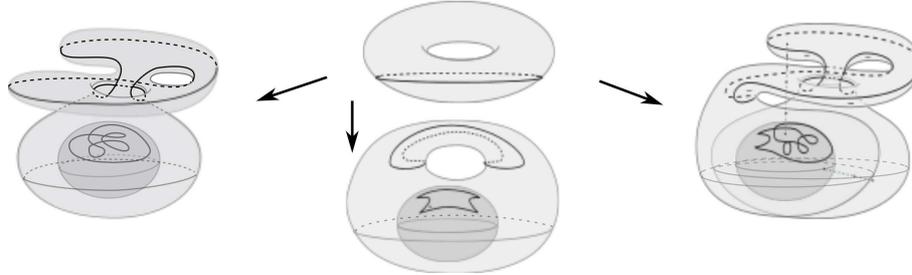


Figura 1: Exemplos de aplicações do toro na esfera.

Dada uma aplicação estável $f \in \mathcal{E}(M, N)$, um ponto x em M é dito ponto **regular** de f se a aplicação f é um difeomorfismo local na vizinhança do ponto x , caso contrário dizemos que x é um ponto **singular**. As singularidades locais de f , segundo um Teorema de Whitney [10], são do **tipo dobra** (com forma local $(x, y) \mapsto (x^2; y)$) e do tipo **cúspides** (com forma local $(x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$).

O conjunto de todos os pontos singulares de f , denotado por Σf , é chamado de **conjunto singular** de f e está formado por um conjunto de curvas simples, disjuntas e mergulhadas em M (subvariedade de codimensão 1 em M). O conjunto de todos os pontos não singulares de f , denotado por $M \setminus \Sigma f$, é chamado de conjunto *regular* e consiste em um número finito de regiões de M que são imersas em N por f . As regiões regulares tem como bordo as curvas de Σf . A imagem destas curvas singulares, denotado por $Bf = f(\Sigma f)$, é chamado de **contorno aparente** de f (ou conjunto de ramificação) e está formado por curvas suaves em N com um número finito de pontos duplos, de interseções trasversas, e possíveis pontos de cúspides.

Grafos de aplicações estáveis. Dadas duas superfícies fechadas e orientadas M e N duas uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$, as curvas conjunto singular Σf separam as regiões do conjunto regular $M \setminus \Sigma f$ em componentes conexas disjuntas. Então podemos associar ao par $(M, \Sigma f)$ um grafo \mathcal{G} com pesos nos vértices da seguinte forma:

- i) cada região regular U de $M \setminus \Sigma f$ fazemos corresponder a um vértice v em \mathcal{G} ,
- ii) cada curva α de Σf fazemos corresponder uma aresta a em \mathcal{G} ,
- iii) um vértice v recebe o peso t se a região regular correspondente a v tem gênero t (soma de t toros).
- iv) Uma aresta a conecta o vértice v se, e somente se, a curva singular correspondente a a está no bordo da região regular correspondente a v .

Definição 2.1. O grafo \mathcal{G} associado a $f \in \mathcal{E}(M, N)$ é chamado de **grafo dual** de f .

Definição 2.2. Seja \mathcal{G} um grafo com E arestas, V vértices e pesos t_i nos vértices v_i , para $i = 1, \dots, V$. Chamaremos de **característica** de \mathcal{G} o vetor $C(\mathcal{G}) = (V, E, T)$, onde $T = \sum_{i=1}^V t_i$.

Em [1] foi estendida a definição de grafos com pesos nos vértices para o par (M, \mathcal{C}) , onde \mathcal{C} é um conjunto de curvas fechadas simples e disjuntas sobre a superfície orientada M , e foi provado que todo grafo com pesos nos vértices está associado a algum par (M, \mathcal{C}) , onde o gênero de M é dado por $g(M) = 1 - V + E + T$.

Proposição 2.3. *Seja \mathcal{G} um grafo com $C(\mathcal{G}) = (V, E, T)$ associada a um par (M, \mathcal{C}) , onde \mathcal{C} é um conjunto de curvas simples, fechadas e disjuntas sobre a superfície fechada e orientada M . Então a característica de Euler de M é dado por $\chi(M) = 2(V - E - T)$.*

Demonstração. A característica de Euler de cada componente M_i de $M \setminus \mathcal{C}$ com gênero t_i e E_i componentes de bordos de M_i , sabemos da Topologia Algébrica que, é dada por $\chi(M_i) = 2 - 2t_i - E_i$. A interseção entre duas componentes regulares quaisquer é um curva fechada e tem a característica de Euler igual a zero. Logo $\chi(M) = \sum_{i=1}^V \chi(M_i) = \sum_{i=1}^V (2 - 2t_i - E_i) = 2(V - T - E)$, pois cada componente singular E_i é bordo de duas componente regulares. \square

Uma região de $M \setminus \Sigma f$ será dita *positiva* se tem a orientação preservada por f e *negativa* no caso contrário.

Observe que se M é orientada, toda curva do conjunto singular de uma aplicação $f \in \mathcal{E}(M, N)$ separa uma região regular positiva de uma região regular negativa. Ou seja, o conjunto singular cria uma bipartição no conjunto regular, consequentemente, podemos afirmar que *todo grafo associado a uma aplicação estável de uma superfície orientada M sobre uma superfície N é bipartido*.

Uma pergunta natural é: *Quais grafos bipartidos com pesos inteiros positivos nos vértices podem ser associados a aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas?*

Dada uma aplicação $f \in \mathcal{E}(M, N)$ com grau d , denotaremos por M^+ e M^- , respectivamente, o conjunto de todas as regiões regulares positivas e negativas, por V^\pm o número de componentes regulares de M^\pm e por T^\pm a soma total dos gêneros das componentes de M^\pm . Aplicando cirurgias de aplicações estáveis e transições de codimensão um, no espaço das aplicações suaves, foi provado em [5] que $(V^+ - V^-) - (T^+ - T^-) = d(1 - g(N) - (C^+ - C^-))$, onde $(C^+ - C^-)$ corresponde a diferença dos números de cúspides que apontam, respectivamente, para M^+ e M^- . O próximo resultado é uma consequência imediata.

Teorema 2.4. *Todo grafo associado a uma aplicação estável sem cúspides $f \in \mathcal{E}(M, N)$ com grau d satisfaz $(V^+ - V^-) - (T^+ - T^-) = d(1 - g(N))$.*

Em [3] foi provado que *todo grafo com pesos nos vértices pode ser realizado por uma aplicação sem cúspides na esfera com grau $d = (V^+ - V^-) - (T^+ - T^-)$.*

3 Cirurgia de Aplicações estáveis

Nosso objetivo é mostrar que grafos bipartidos com pesos nos vértices podem ser associados a aplicações estáveis entre superfície orientadas. Uma forma de construir estas aplicações é através de cirurgias de aplicações estáveis.

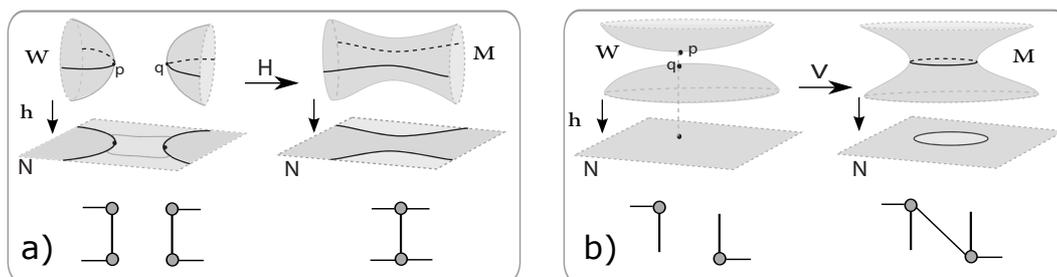


Figura 2: H : cirurgia horizontal e V : cirurgia vertical

Em [2] foi definido dois tipos de cirurgias de aplicações estáveis entre superfícies, chamadas de cirurgia horizontal e cirurgia vertical (respect.) ilustrada na Figura 2. Nas duas cirurgias um par de discos disjuntos da superfície é removido e substituído por um tubo conectando os bordos, onde estendemos a aplicação sobre o interior do tubo, como veremos a seguir:

a) **Cirurgia Horizontal H .** Dada uma aplicação estável h entre duas superfícies W e N , uma ponte é um retângulo β com o interior mergulhado no complementar do contorno aparente Bh em N e com dois lados opostos sobre intervalos $h(I)$ e $h(J)$, de forma compatível com a orientação de Bh (ver a) Figura 2). A aplicação estável h_β (que depende da escolha do lugar da ponte β) é construída como segue: Um ponte β encontra $h(W)$ em dois intervalos $h(I)$ e $h(J)$ contidos em Bh . Escolha pequeno discos em W um conectando I e outro J . Repasse a seus interiores por um tubo respeitando a orientação de W de forma a obter uma orientação na superfície M . A aplicação h , como ilustrada na Figura 2(a), pode ser estendida sobre o tubo de forma a obter a aplicação estável h_β .

Em particular, se W é a união disjunta das superfícies P e Q , denotamos por $W = P \sqcup Q$, onde p e q denota a restrição da aplicação h a P e a Q ; com I em P e J em Q . Neste caso, obtemos a soma horizontal $p \oplus_H q : M \rightarrow N$. Em outras palavras $h = p \cup q$ e $(f \cup l)_\beta = p \oplus_H q$.

b) **Cirurgia Vertical V .** Neste caso, fazemos a soma conexa pela identificação de dois pequenos discos no domínio sem pontos singulares, um contido numa componente regular positiva e outro numa componente regular negativa (ver b) Figura 2) cuja imagem em N coincide.

Os discos são substituídos por um tubo que é aplicado em N , com uma curva singular ao redor no meio do tubo. Assim a cirurgia adiciona uma curva disjunta mergulhada no conjunto de ramificação. Denotamos esta soma como $p \oplus_V q$.

A Figura 3 ilustra exemplos de cirurgias horizontais e verticais de uma aplicação estável sobre a esfera, onde M . Da esquerda para a direita, a primeira figura corresponde a uma aplicação da esfera na esfera com cinco curvas singulares e dois pontos de cúspides cada uma, a segunda figura corresponde a uma aplicação do 4-toro na esfera, que pode ser obtida por quatro cirurgias horizontais sobre a primeira aplicação e a terceira (os “olhos do morcego”) pode ser obtido por duas cirurgias verticais sobre a segunda.

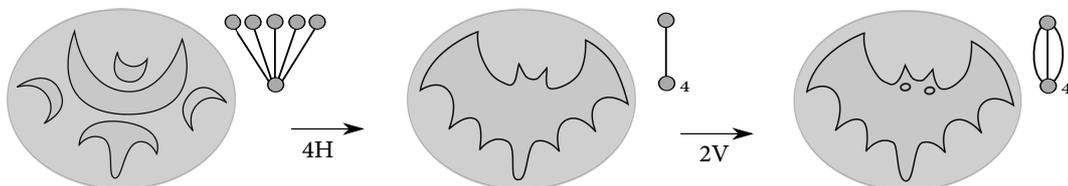


Figura 3: Exemplos de cirurgias sobre uma superfície conexa.

4 Realização de grafos bipartidos

Lembrando que se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável associada a um grafo \mathcal{G} , com $C(\mathcal{G}) = (V, E, T)$, então \mathcal{G} é bipartido e a superfície orientada M tem gênero $g(M) = 1 - V + E + T$.

Observe que sempre podemos obter uma aplicação de grau zero $g : M \rightarrow N$, onde M é uma superfície, pela composição de uma aplicação $h : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com um mergulho da imagem de h sobre N que é a aplicação $j : h(M) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow N$. Toda aplicação com grau zero sobre N é homotópica a alguma aplicação formada por esta composição e será chamada de **aplicação planar**.

Se N é uma superfície fechada e orientada com gênero $n \neq 1$, qualquer aplicação com conjunto singular vazio sobre N é estavelmente homotópica à identidade $Id : N \rightarrow N$ e tem grau um, enquanto que para o toro T^2 , superfície com gênero um, existem aplicações $l : T^2 \rightarrow T^2$ com grau $d > 1$ e com o conjunto singular vazio.

Veremos a seguir como realizar grafos bipartidos, com diferentes pesos, número de vértices e arestas, sobre uma superfície N . Mas antes veremos alguns resultados, provados em [1] e [2], sobre grafos de aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano.

Observe que toda árvore com V vértices pode ser decomposta em subgrafos A_1, \dots, A_k , $k < V$, onde todos os subgrafos tem no máximo quatro vértices. Este grafos podem ser realizados por aplicações $h_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$, como ilustra a Figura 4.

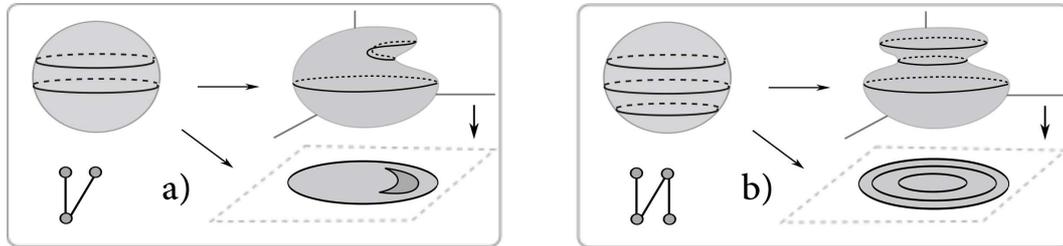


Figura 4: Aplicações da esfera no plano, com duas e três curvas singulares.

Uma aplicação $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza A pode ser obtida por $k - 1$ cirurgias horizontais entre as k aplicações h_i , $i = 1, \dots, k$, respeitando a decomposição de A . Com isto podemos afirmar o próximo resultado.

Teorema 4.1. *Toda árvore A com $C(A) = (V, V - 1, 0)$ pode ser realizada por alguma aplicação $k : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

O grafo com única aresta correspondente a uma aplicação estável com grau zero, será denotado por I_0^r , onde $r = g(M)$. Chamaremos de aplicações *planar básicas* as aplicações associada ao grafo I_0^r .

A Figura 5 ilustra duas aplicações estáveis planares, a primeira com grafo I_0^1 e a segunda grafo I_0^r .

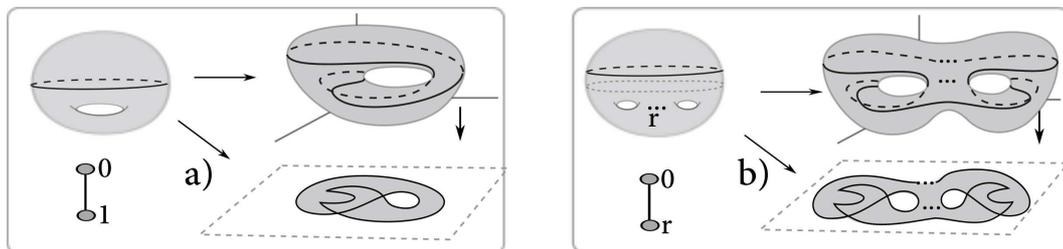


Figura 5: Aplicações planares de grafos com característica $(2, 1, T)$.

Se A é uma árvore com $C(A) = (V, V - 1, 0)$ realizada pela aplicação estável $k : S^2 \rightarrow S^2$, então A com $C(A) = (V, V - 1, T)$, onde $T > 0$, também pode ser realizada por uma aplicação estável $h : Z \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde Z é uma superfície fechada e orientada com gênero T , da seguinte forma: em cada vértice v de A , basta escolher uma aresta a conectada a v e fazer uma soma horizontal entre a aplicação h , sobre a curva correspondente a aresta a , e aplicação básica associada ao grafo I_0^t , ilustrada na Figura 5 b), obtendo assim a aplicação h que realiza A . Isto prova o próximo resultado.

Lema 4.2. *Todo árvore A com $C(A) = (V, V - 1, T)$ pode ser realizada por uma aplicação $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Dado o grafo G com $C(G) = (V, E, T)$, retirando uma aresta de cada ciclo de G , obtemos uma árvore A com $C(A) = (V, V - 1, T)$. Pelo Lema 4.2 existe uma aplicação estável $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza A . Por cirurgia horizontal, podemos realizar as arestas do complementar de A em G ,

desta forma, obtêm-se uma aplicação estável $h : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza G , onde o gênero de W pode ser dado por $g(W) = g(M) + \beta_1(G)$. Assim temos o resultado geral para grafos associados às aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano.

Teorema 4.3. *Todo grafo bipartido G com $C(G) = (V, E, T)$ pode ser realizado por uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Antes de ver quais grafos com pesos nos vértices podem ser realizados, veremos como realizar um grafo com peso em no máximo uma aresta.

O grafo com única aresta correspondente a uma aplicação estável com grau d , será denotado por I_d^r , onde $r = g(M) - dg(N)$. Chamaremos de aplicações *básicas com grau d* as aplicações associadas ao grafo I_d^r .

A Figura 6 ilustra duas aplicações estáveis sobre a superfície N com gênero n , a primeira com grau um e grafo I_1^0 , a segunda com grau d e grafo I_d^0 .

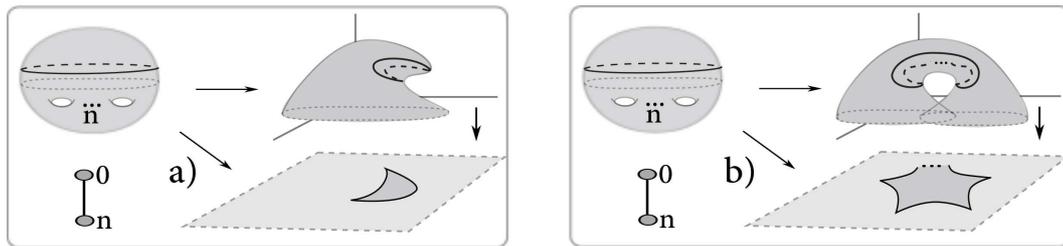


Figura 6: Aplicações com grau d de grafos com característica $(2, 1, T)$.

Lema 4.4. *Toda árvore com $C = (2, 1, T)$ pode ser realizada por uma aplicação $f : M \rightarrow N$, com grau d , onde a superfície N tem gênero $n \geq 0$ e M tem gênero $T = dn + r$, para algum $r \geq 0$.*

Demonstração. Para $d = 0$, se $T = 0$ a aplicação f com única curva singular pode ser a projeção trivial da 2-esfera no plano. Para $T > 0$, f pode ser como as aplicação básica com grafo I_0^r , Figura 5 a) e b). Aplicações com grau $d \neq 0$ e única curva singular pode ser obtida como soma das aplicações básicas com grafo I_d^0 , Figura 6 a) e b) e I_0^r . \square

O próximo resultado generaliza todos os resultados de grafos para aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientadas.

Teorema 4.5. *(Teorema de realização) Todo grafo bipartido G com $C(G) = (V, E, T)$ pode ser realizado por uma aplicação estável, sobre uma superfície fechada e orientada N com gênero n , com grau no máximo igual a $d = T/n$.*

Demonstração. Primeiro, lembramos que toda aplicação f de uma superfície M no plano pode ser considerada (por um mergulho da imagem de f sobre N) como uma aplicação de grau zero entre duas superfícies M e N .

Pelo Teorema 4.3, podemos afirmar que todo grafo bipartido com pesos inteiros positivos nos vértices está associado a alguma aplicação estável $\phi : M \rightarrow N$ com grau $d = 0$.

Veremos como realizar um grafo dado por uma aplicação $\psi \rightarrow N$ com grau máximo. Dado um grafo G com $C(G) = (V, E, T)$, denotamos os pesos nos vértices de G por t_1, \dots, t_V e por $r_i = t_i - d_i n$, onde $r_i < n$ e $d_i \geq 0$. Pelo Teorema 4.3 existe uma aplicação estável $f : S \rightarrow N$ com grau zero que realiza o grafo G com $C(G) = (V, E, R)$, onde $R = \sum_{i=1}^V r_i$.

Fazendo uma cirurgia horizontal entre a aplicação ϕ e a aplicação básica com grafo $I_{d_i}^0$ para cada vértice v_i com $d_i > 0$, obtemos a aplicação ψ com grau $d = \sum_{i=1}^V d_i$, que realiza o grafo G com $C(G) = (V, E, T)$. \square

A Figura 7 ilustra um esquema que pode simplificar bem a ideia, dos resultados apresentados aqui, de como realizar um grafo com pesos nos vértices por uma aplicação sobre uma superfície n .

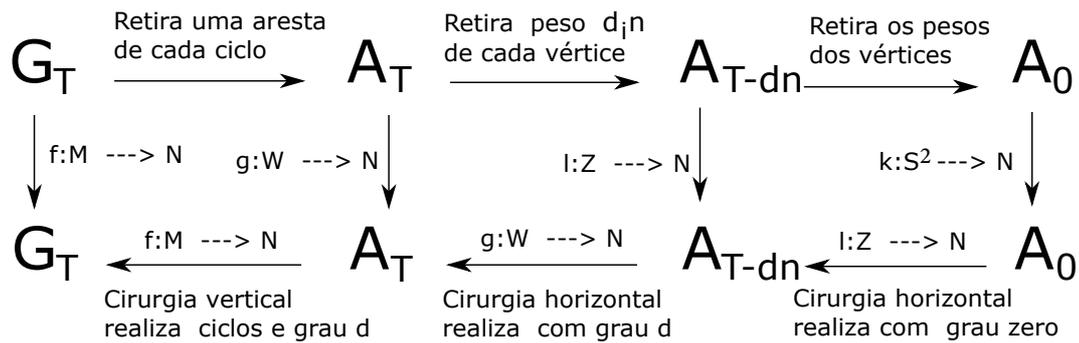


Figura 7: Esquema de realização de grafos com pesos.

Referências

- [1] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. *Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 232, Marcel and Dekker, 227-235, 2003.
- [2] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data *Topology and Its Appl.* 154, 166-175, 2007.
- [3] D. Hacon, C. Mendes de Jesus and M. C. Romero Fuster, Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. *J. Singularities* 2, 67-80, 2010.
- [4] C. Mendes de Jesus, “Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano”, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 2001.
- [5] C. Mendes de Jesus, Relationship between cusps and regular set of applications between surfaces, preprint 2013.
- [6] C. Mendes de Jesus and M.C. Romero Fuster, Graphs of stable maps from closed surfaces to projective plane, preprint 2014.
- [7] C. Mendes de Jesus, S. M. Moraes and M. C. Romero Fuster, Stable Gauss maps from a global viewpoint. *Bull. Brazilian Math. Soc.* 42(1), 87–103, 2011.
- [8] C. MENDES DE JESUS, R. OSET SINHA and M. C. ROMERO FUSTER, Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to R^3 , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 267 (2009) 205-216.
- [9] T. Ohmoto and F. Aicardi, First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology*, 45 (2006) 27-45.
- [10] H. Whitney, On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane, *Ann. of Math.* 62 (1955) 374-410.