

# Análise da Estacionariedade da Resposta de um Sistema Massa-Mola-Amortecedor sob um Carregamento Estocástico

João F. C. Lobato,<sup>1</sup> Roberta Lima,<sup>2</sup> Rubens Sampaio<sup>3</sup>

Laboratório de Dinâmica e Vibrações, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro

**Resumo.** Este trabalho investiga a resposta de um sistema determinístico, linear e invariante no tempo do tipo massa-mola-amortecedor submetido a um carregamento modelado como um processo estocástico estacionário. O objetivo é verificar, por meio de simulações numéricas, se a resposta do sistema apresenta propriedades de estacionariedade no regime permanente. As respostas foram obtidas por meio do método de Monte Carlo e analisadas utilizando duas métricas: a distância de engenharia e a distância de Wasserstein. Enquanto a distância de engenharia avalia apenas a proximidade entre médias, a distância de Wasserstein quantifica a divergência entre distribuições de probabilidade. Dessa forma, a métrica de Wasserstein é empregada para comparar as aproximações numéricas para as distribuições de probabilidade em diferentes seções do processo estocástico que caracteriza a resposta do sistema, permitindo investigar sua aproximação a um processo fracamente ou estritamente estacionário. Além disso, como a análise exige a comparação de distribuições em espaços de alta dimensão, a distância de Wasserstein mostra-se uma ferramenta mais adequada do que a inspeção visual de histogramas, que se torna imprecisa e inviável nesses casos.

**Palavras-chave.** Processos Estocásticos Estacionários, Vibrações Aleatórias, Monte Carlo, Métrica de Engenharia, Métrica de Wasserstein.

## 1 Introdução

Sistemas mecânicos sujeitos a carregamentos aleatórios são comuns em diversas aplicações, o que motiva este trabalho. Exemplos típicos incluem pontes expostas à ação do vento, às ondas do mar sobre os pilares que as sustentam e ao tráfego de veículos, bem como as pás de turbinas eólicas submetidas ao vento e um prédio durante um terremoto. Nesses casos, as vibrações aleatórias geradas pelas forças externas criam respostas estocásticas nos sistemas. Este trabalho tem como objetivo analisar a resposta de um sistema determinístico, linear e invariante no tempo com um grau de liberdade do tipo massa-mola-amortecedor, ilustrado na Figura 1, submetido a um carregamento modelado como um processo estocástico estacionário.

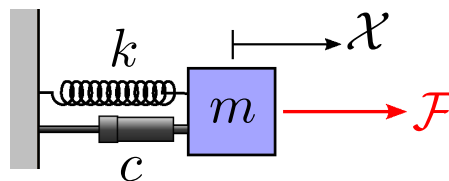


Figura 1: Sistema massa-mola-amortecedor analisado. Fonte: Autoria Própria.

<sup>1</sup>joaofelipecostalobato6@gmail.com

<sup>2</sup>robertalima@puc-rio.br

<sup>3</sup>rsampaio@puc-rio.br

Os parâmetros do sistema são: massa  $m = 1$  kg, constante de amortecimento do amortecedor  $c = 0,1$  Ns/m, rigidez da mola  $k = 1$  N/m. A posição da massa é parametrizada por  $\mathcal{X}$  e considera-se condições iniciais de posição e velocidade nulas. A amplitude  $F_a$  e frequência  $F_\omega$  do carregamento estocástico  $\mathcal{F}$  são modeladas como variáveis aleatórias independentes e seguem distribuição normal  $\mathcal{N}(1, 1/3)$ . A equação que rege a dinâmica do sistema é:  $\ddot{\mathcal{X}}(t) + 0,1\dot{\mathcal{X}}(t) + \mathcal{X}(t) = F_a \cos(F_\omega t)$ .

Dado que o carregamento  $\mathcal{F}$  é aleatório, a resposta do sistema também é modelada como um processo estocástico,  $\mathcal{X}$ , e o estudo busca investigar se essa resposta exibe características de estacionariedade no regime permanente [1, 5]. Seja  $T$  um intervalo de análise, um processo estocástico  $\mathcal{X}$  é uma função tal que  $\forall t \in T$ , existe uma variável aleatória  $\mathcal{X}(t)$  definida em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbb{F}, Pr)$ . Um processo é dito estritamente estacionário se  $\forall m \in \mathbb{N}$  e todo  $(t_1, \dots, t_m) \in T^m$ , a distribuição de probabilidade conjunta de  $(\mathcal{X}(t_1), \dots, \mathcal{X}(t_m))$  é idêntica à distribuição de probabilidade conjunta de  $(\mathcal{X}(t_1 + \Delta t), \dots, \mathcal{X}(t_m + \Delta t)) \forall \Delta t \in \mathbb{R}$ , e fracamente estacionário se a igualdade ocorrer apenas para  $m \in \{1, 2\}$ . O objetivo deste trabalho é verificar se a resposta do sistema exibe características de estacionariedade no regime permanente, ou seja, se as definições mencionadas anteriormente se aplicam. No entanto, a análise será realizada por meio de simulações numéricas, utilizando o método de Monte Carlo [5, 7]. Nesse método, são geradas diversas realizações do carregamento e, para cada uma delas, calcula-se uma realização da resposta do sistema por meio de uma expressão algébrica [4, 5], em um intervalo de análise. A partir das realizações da resposta, constrói-se um modelo estatístico para a resposta do sistema, calculando, por exemplo, médias amostrais ao longo do tempo e histogramas normalizados para diferentes seções do processo estocástico. O número de realizações é determinado por uma análise de convergência: aumenta-se o número de realizações até que as estatísticas amostrais calculadas se estabilizem dentro de uma tolerância previamente definida [5]. Como é utilizado o método de Monte Carlo, não há distribuição de probabilidade conjunta de  $(\mathcal{X}(t_1), \dots, \mathcal{X}(t_m))$  disponível para comparar com a distribuição de probabilidade conjunta de  $(\mathcal{X}(t_1 + \Delta t), \dots, \mathcal{X}(t_m + \Delta t))$ . Em vez disso, há apenas histogramas normalizados, o que gera duas dificuldades. A primeira é que, para realizar as comparações, seria necessário comparar histogramas, o que, a princípio, é uma tarefa de inspeção visual imprecisa. A segunda dificuldade é que a visualização de histogramas é limitada a dimensões  $m = 1$  e  $m = 2$ , ou seja, é possível, no máximo, visualizar o histograma conjunto de duas seções do processo estocástico. Para ilustrar, a Figura 2 apresenta os histogramas normalizados univariados para diferentes seções de  $\mathcal{X}$ , bem como os histogramas bivariados, ou seja, o conjunto de duas seções de  $\mathcal{X}$ . Os histogramas foram construídos a partir de 300 mil realizações da resposta do sistema, sendo esse número de realizações definido por meio de uma análise de convergência. O intervalo de análise adotado foi de  $[0, 300]$  s.

Para superar as limitações das comparações visuais de histogramas e a restrição à visualização de histogramas bivariados, serão utilizadas métricas para comparar as distribuições de probabilidade conjuntas de até cinco seções do processo estocástico que descreve a resposta do sistema. Serão empregadas duas métricas: a distância de engenharia e a distância de Wasserstein, conforme descrito na Seção 2.

## 2 Métricas de Engenharia e de Wasserstein

Sejam  $X = \mathcal{X}(t_1)$  e  $Y = \mathcal{X}(t_2)$  duas variáveis aleatórias provenientes de um processo estocástico  $\mathcal{X}$ . Suas distribuições de probabilidade são  $p_X$  e  $p_Y$  respectivamente. A distância de engenharia entre elas é dada pela equação (1) [6]:

$$\mathcal{E}(p_X, p_Y) = |\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]| = \left| \int_{\mathbb{R}} x(p_X(x) - p_Y(x))dx \right|, \quad (1)$$

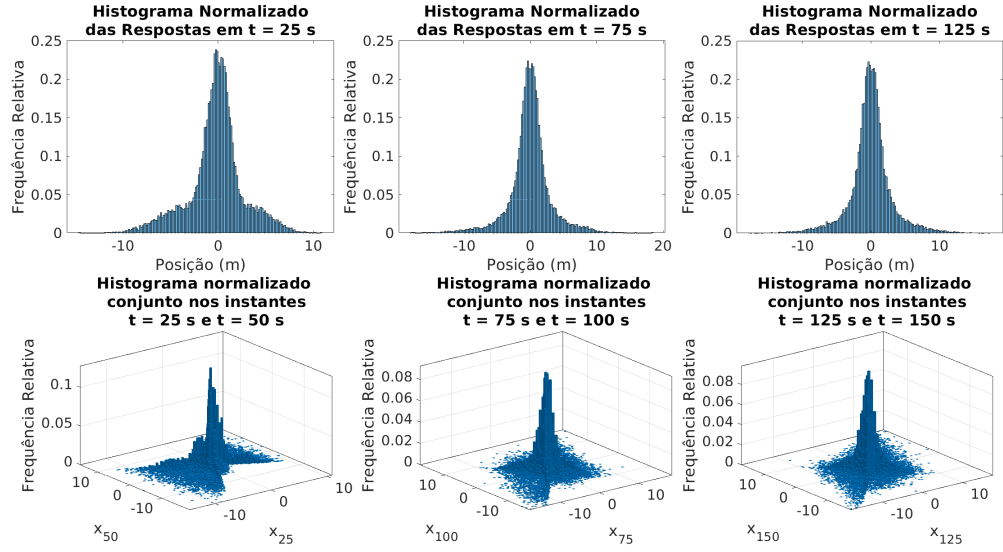


Figura 2: Histogramas normalizados univariados e bivariados. Fonte: Autoria Própria.

caso  $X$  e  $Y$  tenham média. Quando as densidades de probabilidade de  $X$  e  $Y$  são desconhecidas, mas se tem  $n$  realizações dessas variáveis aleatórias, dadas por  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  e  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ , é possível calcular uma aproximação para a distância de engenharia  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$  pela equação (2):

$$\hat{\mathcal{E}}(p_X, p_Y) = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^{(i)} \right|. \quad (2)$$

Sejam  $X = \mathcal{X}(t_1)$  e  $Y = \mathcal{X}(t_2)$  duas variáveis aleatórias contínuas com densidades de probabilidade  $p_X$  e  $p_Y$  e distribuições de probabilidade cumulativas  $P_X$  e  $P_Y$  respectivamente. A distância de Wasserstein de ordem  $q$   $\mathcal{W}_q$  entre elas é dada pela equação (3) [3]:

$$\mathcal{W}_q(p_X, p_Y) = (\inf \mathbb{E}[|X - Y|^q])^{1/q} = \left( \int_{\mathbb{R}} |P_X(x) - P_Y(x)|^q dx \right)^{1/q}. \quad (3)$$

De forma análoga à distância de engenharia, é possível calcular uma aproximação para a distância Wasserstein quando as densidades de probabilidade de  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$  são desconhecidas, mas há realizações dessas variáveis aleatórias. Sejam  $x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}$  e  $x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)}$  realizações de  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$  ordenadas de forma crescente tal que  $x_1^{(1)} \leq \dots \leq x_1^{(n)}$  e  $x_2^{(1)} \leq \dots \leq x_2^{(n)}$ . Uma aproximação para a distância de Wasserstein  $X$  e  $Y$  pode ser calculada pela equação (4):

$$\hat{\mathcal{W}}_q(p_X, p_Y) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x^{(i)} - y^{(i)}|^q \right)^{1/q}. \quad (4)$$

A distância de Wasserstein pode também ser definida para vetores aleatórios com dimensão  $m > 1$ . Sejam  $\mathbf{X} = [\mathcal{X}(t_1), \mathcal{X}(t_2), \dots, \mathcal{X}(t_m)]^T$  e  $\mathbf{Y} = [\mathcal{X}(t_{m+1}), \dots, \mathcal{X}(t_{2m})]^T$  dois vetores aleatórios em  $\mathbb{R}^m$  contendo diferentes seções do processo estocástico  $\mathcal{X}$  e distribuições de probabilidade  $p_{\mathbf{X}}$  e  $p_{\mathbf{Y}}$  respectivamente. A distância de Wasserstein entre  $p_{\mathbf{X}}$  e  $p_{\mathbf{Y}}$  é dada pela equação (5) [2]:

$$\mathcal{W}_{q,m}(p_{\mathbf{X}}, p_{\mathbf{Y}}) = \inf_{\pi \in \Gamma(p_{\mathbf{X}}, p_{\mathbf{Y}})} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^q d\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right)^{1/q}, \quad (5)$$

onde  $\Gamma(p_{\mathbf{X}}, p_{\mathbf{Y}})$  é o conjunto de medidas de probabilidade (também chamadas de planos de transporte) em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  com respectivas distribuições marginais  $p_{\mathbf{X}}$  e  $p_{\mathbf{Y}}$ .

### 3 Resultados das Simulações Numéricas

Com as realizações do processo estocástico  $\mathcal{X}$  obtidas por meio de simulações de Monte Carlo, foram calculadas aproximações para as métricas de engenharia e de Wasserstein entre as seções  $\mathcal{X}(t)$  e  $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ , considerando diferentes combinações de instantes  $t$  e intervalos  $\Delta t$ . As métricas também foram avaliadas para distribuições de probabilidade conjuntas de até cinco seções da resposta do sistema.

Foram também analisados os efeitos de diferentes fatores nas aproximações das métricas, incluindo a influência do coeficiente de amortecimento do sistema, a ordem  $q$  da distância de Wasserstein e a influência do número de realizações utilizadas nas simulações de Monte Carlo. Caso não sejam mencionados explicitamente, os valores dos parâmetros do sistema, condições iniciais, dados do carregamento e número de realizações seguem as definições apresentadas na Seção 1.

#### 3.1 Distâncias de Engenharia: Alterando Fator de Amortecimento

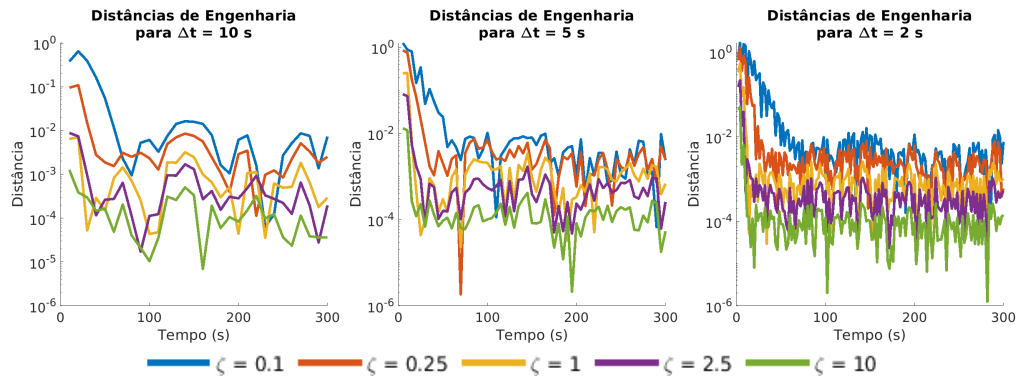


Figura 3: Distâncias de engenharia para diferentes  $\Delta t$  e fatores de amortecimento  $\zeta$ . Fonte: Autoria Própria.

A Figura 3 apresenta as aproximações para as distâncias de engenharia entre as seções  $\mathcal{X}(t)$  e  $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ , calculadas para diferentes valores do fator de amortecimento  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ , considerando intervalos fixos de  $\Delta t$ . O eixo horizontal representa o tempo  $t$  (em segundos), enquanto o eixo vertical, em escala logarítmica, mostra os valores das distâncias de engenharia. É importante destacar que, para cada ponto do gráfico, a posição no eixo  $t$  indica o instante inicial da seção  $\mathcal{X}(t)$ , enquanto  $\mathcal{X}(t + \Delta t)$  é definida com base no  $\Delta t$  fixado.

Cada curva no gráfico corresponde a um valor específico de  $\zeta$ , permitindo observar como o amortecimento afeta as aproximações das distâncias ao longo do tempo. O comportamento das curvas evidencia que maiores valores de amortecimento resultam em uma convergência mais rápida das distâncias para valores próximos de zero, indicando menor variação entre as distribuições das seções comparadas. No entanto, a estabilização das distâncias de engenharia amostrais não é suficiente para afirmar que a resposta do sistema converge para um processo estocástico estacionário, pois a estacionariedade exige que as distribuições de probabilidade conjuntas das seções do processo permaneçam invariantes no tempo, e não apenas a estabilidade dos momentos de primeira ordem.

### 3.2 Distâncias de Wasserstein

Aplicando a equação (4), foram calculadas as distâncias de Wasserstein entre as distribuições das posições para diferentes intervalos, alterando determinados parâmetros. A dimensão e a ordem padrão são  $m = 1$  e  $q = 2$  respectivamente.

#### 3.2.1 Alterando Tamanho da Amostra

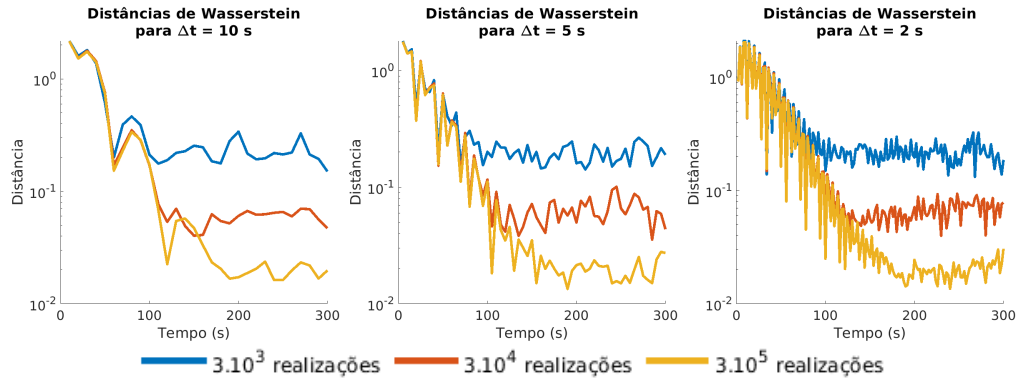


Figura 4: Distâncias de Wasserstein para diferentes  $\Delta t$  e tamanhos de amostra. Considera-se  $q = 2$ .  
Fonte: Autoria Própria.

A Figura 4 apresenta as aproximações calculadas para as distâncias de Wasserstein entre as seções  $\mathcal{X}(t)$  e  $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ , calculadas para diferentes número de realizações utilizadas nas simulações de Monte Carlo, considerando intervalos fixos de  $\Delta t$ . Destaca-se que, para cada ponto do gráfico, a posição no eixo  $t$  indica o instante inicial da seção  $\mathcal{X}(t)$ , enquanto  $\mathcal{X}(t + \Delta t)$  é definida com base no  $\Delta t$  fixado. Em todas as curvas da Figura 4 observa-se, apesar das oscilações, a diminuição das distâncias com o passar do tempo, que ocorre mais rapidamente para amostras maiores.

#### 3.2.2 Alterando Fator de Amortecimento

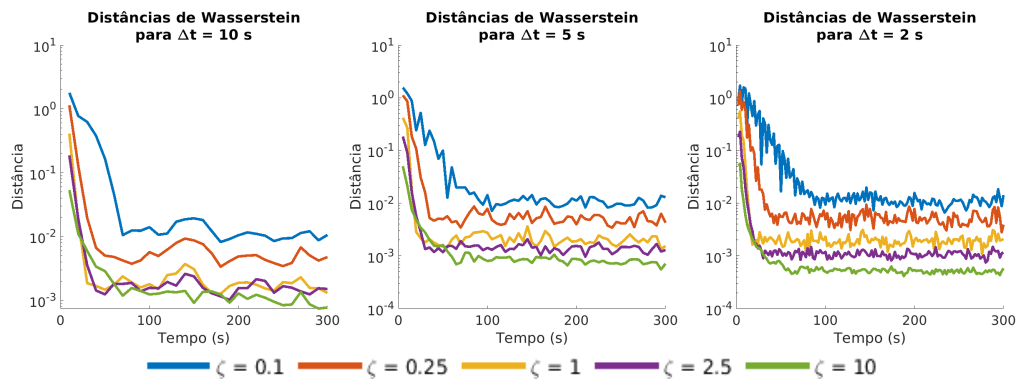


Figura 5: Distâncias de Wasserstein para diferentes  $\Delta t$  e fatores de amortecimento  $\zeta$ . Considera-se  $q = 2$ . Fonte: Autoria Própria.

De forma análoga ao feito para a distância de engenharia, foi feita uma análise da influência do fator de amortecimento  $\zeta$  do sistema nas aproximações para as distâncias de Wasserstein entre

as seções  $\mathcal{X}(t)$  e  $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ . Através dos resultados obtidos, mostrados na Figura 5, verifica-se que quanto maior o amortecimento, mais rapidamente as distâncias de Wasserstein decaem, indicando menor variação entre as distribuições das seções comparadas.

### 3.2.3 Alterando Ordem

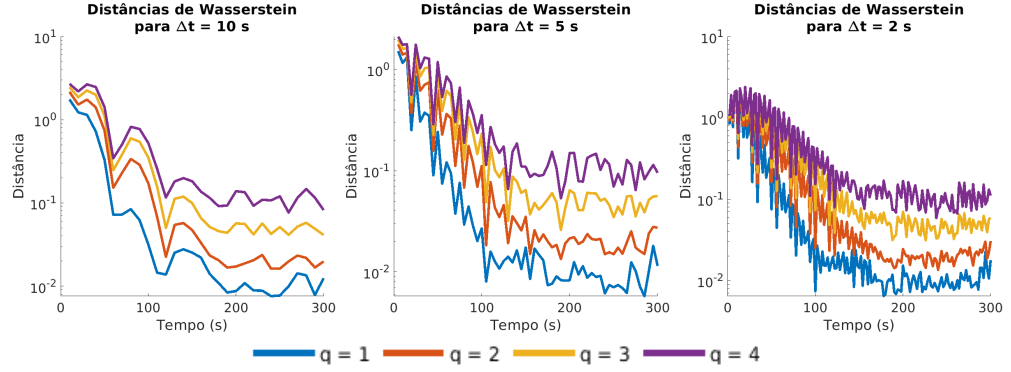


Figura 6: Distâncias de Wasserstein para diferentes  $\Delta t$  e ordens  $q$ . Fonte: Autoria Própria.

A Figura 6 apresenta as aproximações calculadas para as distâncias de Wasserstein entre as seções  $\mathcal{X}(t)$  e  $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ , calculadas para diferentes ordens  $q$  e intervalos fixos de  $\Delta t$ . Apesar das oscilações, verifica-se que as distâncias decaem mais rapidamente para ordens  $q$  menores.

### 3.2.4 Alterando Dimensão

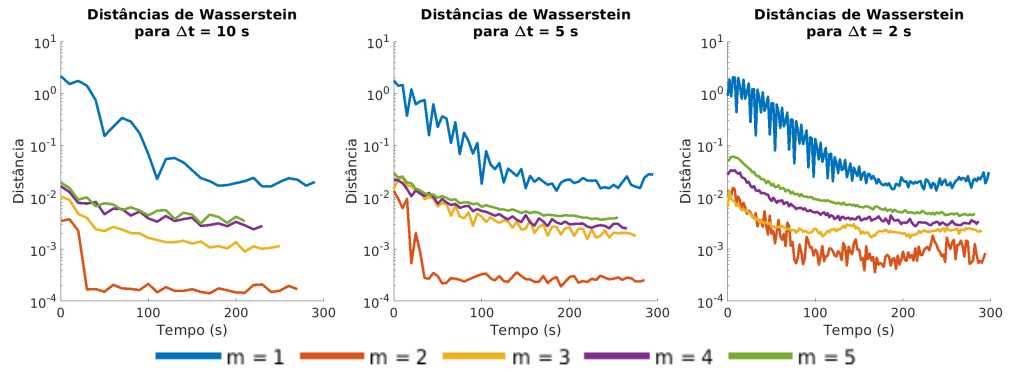


Figura 7: Distâncias de Wasserstein para diferentes  $\Delta t$  e dimensões  $m$ . Considera-se  $q = 2$ . Fonte: Autoria Própria.

A Figura 7 apresenta as aproximações calculadas das distâncias de Wasserstein entre as distribuições de probabilidade dos vetores aleatórios  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ . Esses vetores representam distribuições conjuntas de até cinco seções, com  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , referentes à resposta  $\mathcal{X}$  para diferentes  $\Delta t$ . Para cada valor de  $\Delta t$ , as seções são selecionadas uniformemente com um espaçamento de  $\Delta t$ , resultando nas seguintes definições:  $\mathbf{X} = [\mathcal{X}(t_1), \mathcal{X}(t_2), \dots, \mathcal{X}(t_m)]^T$  e  $\mathbf{Y} = [\mathcal{X}(t_{m+1}), \dots, \mathcal{X}(t_{2m})]^T$ , com a condição de que  $t_j = t_1 + (j - 1)\Delta t$  para  $j = 1, \dots, 2m$ . Para cada ponto do gráfico, a posição no eixo  $t$  indica o instante inicial selecionado para a seção  $\mathcal{X}(t_1)$ .

Verifica-se que as distâncias convergem para qualquer dimensão, sendo que para  $m = 1$  a convergência é a mais lenta.

## 4 Conclusões

Este trabalho investigou a resposta de um sistema determinístico massa-mola-amortecedor submetido a um carregamento descrito por um processo estocástico estacionário. O principal objetivo foi utilizar aproximações numéricas para as distâncias de engenharia e de Wasserstein a fim de verificar se a resposta do sistema apresentaria características de estacionariedade no regime permanente. A distância de engenharia, focada na proximidade das médias das distribuições, foi útil para uma avaliação preliminar, enquanto a distância de Wasserstein ofereceu uma comparação mais robusta, permitindo quantificar a divergência entre as aproximações obtidas para as distribuições de probabilidade em diferentes seções do processo estocástico.

Além disso, devido ao uso do método de Monte Carlo, a distribuição de probabilidade conjunta de diferentes seções da resposta do sistema não era conhecida, havendo apenas histogramas. Isso gerou desafios para as comparações, uma vez que comparar histogramas é, a princípio, uma tarefa imprecisa e de inspeção visual. Adicionalmente, a visualização de histogramas é limitada a no máximo duas seções do processo estocástico simultaneamente. Nesse contexto, o uso da distância de Wasserstein mostrou-se fundamental para superar essas limitações. Utilizou-se essa métrica para comparar as distribuições de probabilidade conjuntas de até cinco seções do processo estocástico.

Por fim, a metodologia desenvolvida neste trabalho pode ser adaptada para a análise de outros sistemas mecânicos, incluindo sistemas não lineares. Sua utilidade decorre da ausência de resultados teóricos gerais para a caracterização da estacionariedade em sistemas desse tipo.

## Referências

- [1] H. Benaroya e S. M. Han. **Probability Models in Engineering and Science**. Boca Raton FL, Estados Unidos: Taylor & Francis Group, LLC, 2005. ISBN: 978-0-8247-2315-6.
- [2] J. Bigot. “Statistical data analysis in the Wasserstein space”. Em: **ESAIM: Proceedings and Surveys** 68 (2020), pp. 1–19. DOI: 10.1051/proc/202068001.
- [3] M. M. Deza e E. Deza. **Encyclopedia of Distances**. 4<sup>a</sup> ed. Rússia, França: Springer, 2016. ISBN: 978-3-662-52844-0. DOI: 10.1007/978-3-662-52844-0.
- [4] D. J. Inman. **Engineering vibrations**. 4<sup>a</sup> ed. Estados Unidos: Pearson Education, 2014. ISBN: 978-0-13-287169-3.
- [5] J. F. C. Lobato. “Desenvolvimento de uma metodologia para análises estatísticas de um sistema massa-mola-amortecedor excitado por um carregamento estocástico”. Projeto de graduação. PUC-Rio, 2024. DOI: 10.17771/PUCRio.acad.68856.
- [6] S. T. Rachev, L. B. Klebanov, S. V. Stoyanov e F. J. Fabozzi. **The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics**. Estados Unidos, Tchêquia, Singapura, França: Springer, 2013. ISBN: 978-1-4614-4869-3. DOI: 10.1007/978-1-4614-4869-3.
- [7] R. Sampaio e R. Lima. **Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios**. Vol. 70. Notas em Matemática Aplicada. São Carlos - SP, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. ISBN: 978-85-8215-031-3.