Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Entre Caixas e Funções: a Matemática por Trás das Embalagens Postais

Jorge L. T. Matos[1], Patrícia M. Kitani[2]
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR
Paulo C. Sanfelice[3]
Colégio Estadual Paulo Leminski, Curitiba, PR

Resumo. Este trabalho propõe um método de modelagem matemática direcionado ao ensino médio, utilizando a resolução de problemas para explorar conteúdos relevantes. A análise do formato e dimensões de embalagens postais dos Correios serve como estudo de caso, enfatizando representações geométricas, gráficas e algébricas. Além disso, para um estudo um pouco mais avançado, são sugeridas conexões entre tópicos do ensino básico e superior, como a relação entre função quadrática e otimização, limites e derivadas.

Palavras-chave. Modelagem Matemática, Funções Quadráticas, GeoGebra, Pontos de Máximo, Pontos de Mínimo.

1 Introdução

Com a crescente facilidade de comprar itens de qualquer lugar do mundo, é fundamental estar atento a possíveis problemas de transporte causados por tamanho e formato inadequados ou que possam dificultar a logística.

Com base nas especificações sobre formatos e dimensões dos Correios para embalagens, decidiu-se fazer uma investigação de possíveis alterações em alguns formatos para que atendam às exigências da empresa. Para ilustrar e guiar o foco dos estudos, é dada inicialmente a seguinte sugestão de problema a ser investigado:

"Para enviar um presente ao meu sobrinho, que mora no município X, precisarei contratar uma empresa de logística, já que resido em Y. Considerei os Correios como primeira opção. Seria possível utilizar os serviços dos Correios para despachar este presente?"

Este trabalho visa apresentar uma proposta que une a resolução de problemas e modelagem matemática, utilizando contextos sociais para tornar o aprendizado da matemática mais significativo.

Uma vez que a modelagem matemática contribui para a contextualização, ao apresentar situações-modelo que podem ser problematizadas, sugere-se uma abordagem pedagógica que combine modelagem e resolução de problemas para otimizar o ensino e a aprendizagem, visando um aprendizado positivo.

[1]jtorrejon@utfpr.edu.br
[2]kitani@utfpr.edu.br
[3]paulo.sanfelice@escola.pr.gov.br

2 Modelagem Matemática no Ensino

A resolução de problemas possui interpretações variadas, influenciadas pelo momento e pelo enfoque da pesquisa (como a linha de pesquisa, a área de estudo e a realidade educacional). Por outro lado, a modelagem matemática se destacou na última década do século passado como uma estratégia metodológica capaz de gerar interesse e tornar o aprendizado de novos conceitos mais significativo. Essa abordagem se baseia na análise do processo de construção de modelos para fenômenos naturais e sociais que façam sentido para quem está ensinando e aprendendo. Segundo Bassanezi [1] a modelagem "... consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real."

Thomas [5] apresenta uma síntese da definição de Bassanezi, conforme a Figura 1.

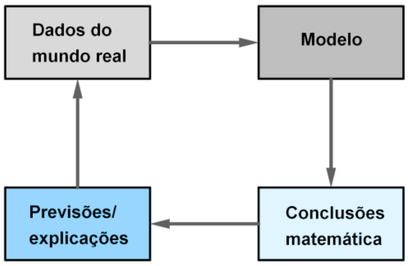

Figura 1: Etapas do processo de modelagem. Fonte: Thomas [5].

Este trabalho inicia-se com um levantamento teórico de documentos normativos sobre o envio de encomendas por uma empresa com experiência em logística de transporte.

2.1 A Normatização para o Envio de Encomendas

Na seção "Enviar" do site dos Correios [2], em "Encomendas > Nacional > Limites e dimensões", encontram-se tabelas com todas as regras e especificações obrigatórias para encomendas enviadas por uma opção de envio rápido. Há determinações para o envio de caixa, envelope, cilíndrico e locker.

Para direcionar melhor o estudo, optou-se por uma das tabelas: a de "Caixa".

A Tabela 1 apresenta as informações, obtidas no site dos Correios, de uma das categorias oferecidas pela empresa.

Tabela 1: Dimensões da caixa.

Comprimento (C)	Largura (L)	Altura (A)	Soma das dimensões
de 13 cm até 100 cm	de 8 cm até 100 cm	de 0,4 cm até 100 cm	de 21,4 cm até 200 cm

2.2 Representação de um Gráfico

Dadas as informações dos Correios, o foco agora é deduzir uma função afim.

O docente pode solicitar aos discentes, ou juntamente com eles, a elaboração de uma representação gráfica das possíveis variações dimensionais de uma caixa com 60 cm de comprimento e na forma de um prisma retangular, em conformidade com as especificações da empresa ($21,4 \leq A + L + C \leq 200$ onde, A, L e C representam altura, largura e comprimento, respectivamente), conforme a Figura 2.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0281

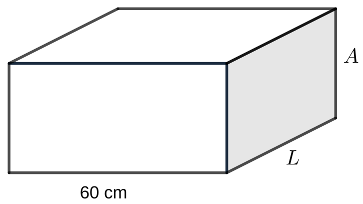

Figura 2: Modelo de caixa. Fonte: Autores.

Seguindo as condições indicadas, obtêm-se as inequações (1) e, consequentemente, as inequações (2) e (3).

$$21,4 \leq 60 + L + A \leq 200; \tag{1}$$
$$-38,6 \leq L + A \leq 140; \tag{2}$$
$$-38,6 - L \leq A \leq 140 - L. \tag{3}$$

A partir da restrição da soma máxima das dimensões, constrói-se uma função f, onde $f(x)$ simboliza a altura da caixa e x a sua largura. A função é dada por $f(x) = 140 - x$.

Foi utilizado o GeoGebra [3] para criar as imagens dos gráficos de funções, considerando suas vantagens como software livre, que combina Álgebra e Geometria, e sua aplicabilidade em diversos níveis educacionais.

Inicialmente, é exibido o gráfico da função f, com domínio e contradomínio nos reais $\mathbb{R}$, sem qualquer restrição, o qual se representa em conjunto por $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

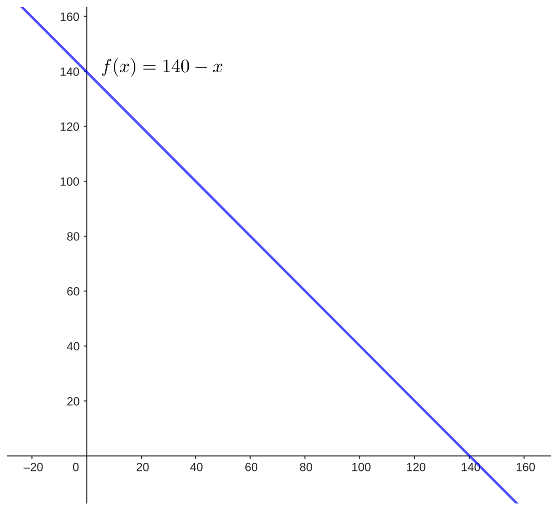

Figura 3: Gráfico da função f sem restrição. Fonte: Autores.

De acordo com a Figura 3, a representação gráfica é de uma função afim ($f(x) = ax + b$) decrescente, onde o coeficiente angular (taxa de variação) é $a = -1$. Este gráfico pode ser usado pelo professor para apresentar o conceito de taxa de variação em aula.

Sanfelice [4] introduz o conceito de taxa média de variação (retas secantes), construindo gradualmente o conceito de derivada (reta tangente). Em seguida, o conceito de derivada de segunda ordem é introduzido, motivado pelas condições do problema dos Correios.

Dando seguimento, torna-se necessário vincular o estudo de funções a contextos reais, utilizando questionamentos para guiar o aluno na investigação e adaptação do gráfico às condições dos Correios. O objetivo é que ele interprete, identifique e destaque, na representação gráfica o segmento de reta, onde cada variação de dimensão deve estar de acordo com as condições dada na Tabela 1. Desse modo, o aluno realizará a modelagem em sua essência, compreendendo a relação entre os modelos matemáticos e a realidade que está sendo modelada.

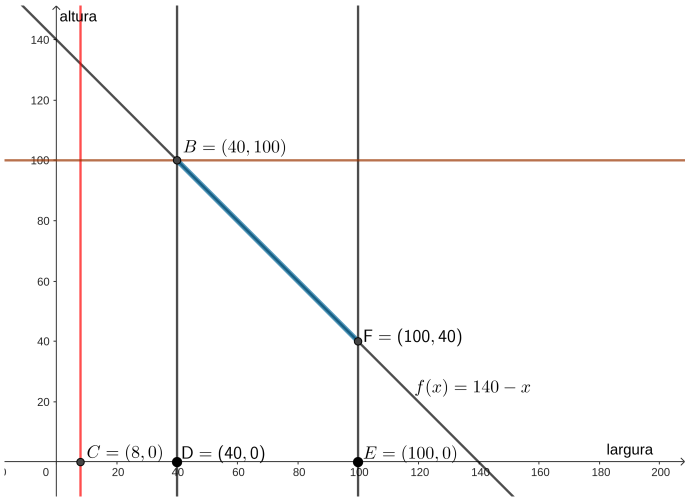

Figura 4: Gráfico modelado de $f(x) = 140 - x$. Fonte: Autores.

O valor da função modelada $f(x)$ e a variável x, por serem as representações da altura e largura, respectivamente, devem respeitar as medidas restritivas dadas na Tabela 1. Nos valores máximos, ambas as dimensões não devem ultrapassar 100 cm, isto é, $f(x) = 140 - x \leq 100$ e $x \leq 100$. A Figura 4 ilustra tais restrições mediante as equações das retas $x = 100$ e $y = 100$. Desta maneira, o domínio de f será $\{x \in \mathbb{R} : \ 40 \leq x \leq 100\}$ e a imagem será $\{y \in \mathbb{R} : \ 40 \leq y = f(x) \leq 100\}$.

Em relação aos valores mínimos permitidos para x e $f(x)$, tem-se que são maiores que a largura mínima (8 cm) e a altura mínima (0,4 cm), respectivamente, não afetando o domínio e a imagem de f. Note que, inicialmente, ao comparar as variações de altura e largura da caixa com o gráfico de f, o aluno poderá escolher qual dimensão associar a cada eixo. No entanto, qualquer que seja sua escolha, ao ajustar o gráfico às restrições das dimensões desconhecidas, ele perceberá que a decisão não fará diferença. Isso porque o menor valor possível para a variável x será 40 cm, superando tanto a altura mínima $(0, 4$ cm$)$ quanto a largura mínima (8 cm).

Embora se tenha utilizado 60 cm como exemplo de comprimento, um aluno poderia escolher qualquer valor para o comprimento, entre 13 cm e 100 cm. A análise é análoga, tomando os devidos cuidados com o estudo da região do domínio, em virtude das especificações das medidas impostas pelos Correios.

2.3 Máximos e Mínimos

Nesta seção é analisada a área máxima da embalagem através de uma função quadrática.

Como visto anteriormente, o comprimento da caixa pode ser qualquer valor entre 13 cm e 100 cm. Para este estudo, é analisada especificamente uma caixa com formato de prisma retangular e comprimento de 60 cm. É importante notar que essa escolha é arbitrária e poder-se-ia ter selecionado outro valor ou até mesmo trabalhado com funções de duas variáveis. No entanto, para adequar o problema ao nível do ensino médio, optou-se por fixar o comprimento.

Dado que essa embalagem será despachada pelos Correios, o problema agora é: que medidas devem ter as outras duas dimensões para que a área total seja a maior possível?

Na Figura 2, pode-se redefinir a largura $L = x$ e a altura $A = y$, assim, desde que o comprimento seja $C = 60$, a área da caixa será expressa pela equação (4).

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2(C \cdot L + C \cdot A + L \cdot A) = 2(60x + 60y + xy); && (4)\\ \mathcal{A} &= 2\left(60x + 60(140 - x) + x(140 - x)\right); && (5)\\ \mathcal{A} &= 2\left(-x^2 + 140x + 8400\right). && (6) \end{aligned}$$

A equação (5) vem do fato de que para alcançar a área máxima, a soma das três dimensões deve ser a maior possível, ou seja, quando $x + y + 60 = 200$.

Na última passagem, aplicou-se a propriedade distributiva e simplificaram-se os termos resultantes, obtendo-se a equação (6). Assim, considerar-se-á a área como sendo duas vezes uma função $g(x)$, isto é, $\mathcal{A}(x) = 2g(x)$, onde $g(x) = -x^2 + 140x + 8400$.

Esta simplificação é realizada, pois as funções $\mathcal{A}(x)$ e $g(x)$ possuem as mesmas raízes. Além disso, constata-se que as restrições para x não são alteradas; portanto, quando o valor máximo de g é encontrado, obtém-se também o de $\mathcal{A}$ ao multiplicar o valor máximo de g por 2.

Em seguida, é representada graficamente a função g e ajustada às restrições de envio dos Correios, garantindo que a embalagem tenha a maior área permitida. A Figura 5 exibe o gráfico contendo todas as informações necessárias.

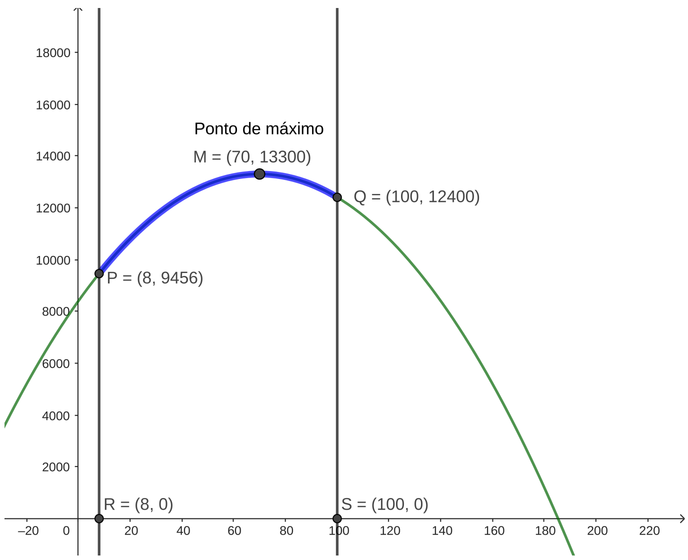

Figura 5: Gráfico de $g(x) = -x^2 + 140x + 8400$. Fonte: Autores.

Para melhor visualização, a porção do gráfico de g que satisfaz as restrições da largura x (mínima e máxima) está em destaque com uma espessura maior. O ponto M na Figura 5 representa o ponto de máximo de g, que foi determinado pelo GeoGebra através da ferramenta "Otimização". A proposta é que o aluno, com a assistência do professor, desenvolva a capacidade de não só construir o gráfico, mas também de analisar criticamente cada ferramenta, recurso e elemento da função g.

No ensino médio, o estudo da função quadrática se concentra em suas características e aplicações, como o cálculo de pontos de máximo e mínimo. No entanto, há oportunidades de expandir

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0281

esse estudo, conectando-o a noções como taxa de variação média e derivada, que geralmente são abordadas apenas na função afim.

Ao analisar o gráfico da parábola, o professor pode explorar o extremo (vértice) de forma mais profunda, questionando a continuidade da função e a inclusão dos extremos no domínio. Isso abre caminho para mencionar que existem ferramentas no ensino superior, como o Teorema de Weierstrass, que garante a existência de valores máximos e mínimos em intervalos contínuos e fechados.

Outra abordagem para encontrar os extremos é através da derivada. O professor pode usar o conceito de taxa de variação média e, mediante o limite, introduzir o conceito de taxa de variação instantânea. Assim, sem formalismo, a derivada é introduzida de forma intuitiva como o coeficiente angular da tangente à curva, com foco na função quadrática do problema de caixa abordado neste trabalho.

Ela também permite analisar o crescimento e decrescimento da função. Se a primeira derivada da função é positiva, a função é crescente; se negativa, decrescente. A segunda derivada, por sua vez, determina a concavidade da curva: positiva para cima, negativa para baixo. Mais detalhes podem ser encontrados na dissertação do PROFMAT de Sanfelice [4].

Como g é uma função quadrática com concavidade para baixo, o ponto de máximo M (indicado na Figura 5) ocorre onde a reta tangente é horizontal, ou seja, tem inclinação nula em relação ao eixo x. Sabendo que a derivada de uma função em um ponto representa a inclinação da tangente naquele ponto, derivar g e igualar o resultado a zero dará a coordenada x do ponto M (uma particularidade do Teorema do Valor Médio). Os cálculos a seguir comprovam esta conclusão.

Para $g(x) = -x^2 + 140x + 8400$, tem-se que a derivada de g é $g'(x) = -2x + 140$. Para encontrar a coordenada x do ponto M, basta resolver a equação $g'(x) = 0$, ou seja, resolver a igualdade $-2x + 140 = 0$. Assim $x = 70$.

2.4 Propostas de Atividades

Nesta seção, é dada brevemente uma sugestão de como o professor poderia encaminhar a atividade envolvendo o conteúdo de funções.

O docente pode apresentar o problema inicial da compra do presente e a dúvida sobre o envio pelos Correios. Pedir aos alunos para pesquisarem os serviços de uma empresa de entrega e identificarem os limites e dimensões para envio de encomendas. A análise apresentada neste trabalho considerou produtos embalados no formato de prisma retangular; contudo, o site dos Correios fornece dados sobre formatos cilíndricos, abrindo a possibilidade para o professor desenvolver atividades similares com cilindros e obter diferentes funções.

Ao explorar a matemática, o professor pode: utilizar o GeoGebra para construir modelos 3D de diferentes embalagens, variando suas dimensões utilizando o controle deslizante; pedir aos alunos para calcularem áreas e volumes, explorando as fórmulas geométricas; realizar atividades práticas de construção de embalagens com materiais recicláveis, seguindo as restrições das empresas; explorar a função afim que relaciona as dimensões da caixa, como apresentado no trabalho; utilizar o GeoGebra para visualizar o gráfico da função; apresentar o conceito de taxa de variação e sua relação com o coeficiente angular da função; aprofundar o estudo da função quadrática, relacionando-a com o problema de otimização da área; introduzir o conceito de derivada para encontrar o ponto de máximo ou mínimo, conectando o ensino médio com o superior.

A seguir, são apresentadas duas propostas de trabalho.

Proposta 1: Divida os alunos em grupos e desafie-os a projetarem embalagens que otimizem o espaço e atendam às limitações dos Correios. Inicialmente, peça para que os alunos coletem dados sobre as dimensões e também sobre os custos de envio de diferentes pacotes e dimensões. No site dos Correios é possível fazer tal simulação de preços. Esses dados devem ser analisados e comparados através de planilhas eletrônicas e representados em gráficos, permitindo aos alunos visualizarem a relação entre as dimensões, o volume e o custo do envio. Os alunos deverão fazer um estudo para a questão da otimização discutida neste trabalho.

Além disso, incentive o uso do GeoGebra para uma modelagem 3D, criando embalagens utilizando as ferramentas “Prismas” e “Controle Deslizante”.

Realize uma apresentação final, na qual os grupos exibirão seus projetos e justificarão suas escolhas. Por fim, o professor pode apresentar aos alunos exemplos de como os conceitos de otimização e cálculo são utilizados em áreas como engenharia, logística e design.

Proposta 2: Nesta proposta, mais uma variável será adicionada: o peso. Propõe-se o trabalho em equipe, em que o grupo escolhe um objeto trazido de casa para simular o processo de embalagem e envio. É importante incentivar a variedade de objetos (tamanhos, formatos e pesos diferentes). Peça que os alunos pesquisem uma empresa onde o objeto poderia ser despachado, mas que leve em consideração não somente as dimensões, mas também o peso máximo permitido. Enfatizar como o conceito de funções está presente nesse processo. A atividade se desenvolverá em etapas: inicialmente, os grupos medirão e pesarão seus objetos, comparando essas medidas com as exigências da empresa escolhida. Em seguida, planejarão uma embalagem adequada, estimando suas dimensões e pesos adicionais. O professor então introduzirá formalmente o conceito de função, conectando as dimensões ao volume e, também ao custo de envio, demonstrando como as restrições da empresa definem o domínio dessas funções.

Os alunos realizarão análises de área e volume do produto planejado, verificando sua conformidade com os limites estabelecidos, e discutirão estratégias para otimizar o uso de material e atender às exigências. Para finalizar, cada grupo apresentará seu objeto, a empresa escolhida, as restrições identificadas, o planejamento do pacote e a análise de como as funções e as limitações estão relacionadas no processo de envio.

3 Considerações Finais

Este trabalho explorou a união da resolução de problemas e modelagem matemática para um aprendizado significativo, partindo do problema do envio de uma embalagem pelos Correios, levando em consideração as restrições das dimensões. Analisaram-se as normativas do envio de encomendas para construir modelos de funções afim e quadrática, visualizados com GeoGebra, explorando otimização e taxa de variação. As propostas de atividades visam contribuir com uma sugestão de organização e desenvolvimento de um conjunto de conteúdos relevantes para o ensino básico. Além disso, incentivam o trabalho em grupo e a aplicação prática. Conclui-se que essa abordagem contextualizada torna a matemática mais atrativa e desenvolve habilidades de resolução de problemas, introduzindo noções da matemática superior de forma gradual e prática.

Referências

[1] R. C. Bassanezi. **Ensino-aprendizagem com modelagem: uma nova estratégia**. 1a. ed. São Paulo: Contexto, 2002. ISBN: 8572442073.

[2] Correios. **Correios**. Online. Acessado em 11/03/2025, `https://www.correios.com.br`.

[3] GeoGebra. **GeoGebra**. Online. Acessado em 24/04/2025, `https://www.geogebra.org/classic`.

[4] P. C. Sanfelice. “Embalando e despachando: a relação mútua entre modelos geométricos e a aprendizagem escolar”. Dissertação de mestrado. UTFPR, 2017.

[5] G. B. Thomas. **Cálculo**. 11a. ed. São Paulo: Pearson, 2009. ISBN: 8588639319.

