Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Investigando Rotações, Fractais e Números Complexos Através de Atividades Dinâmicas Computacionais

Olga H. Saito[1] Rudimar L. Nós[2]
UTFPR, Curitiba, PR
Agnaldo A. Moreira[3]
Escola AET, São Paulo, SP

Resumo. Apresentamos neste trabalho atividades dinâmicas para contextualizar propriedades e aplicações dos números complexos, as quais podem ser aplicadas na Licenciatura em Matemática e adaptadas para o Ensino Médio. As atividades, desenvolvidas com o emprego de recursos computacionais como o GeoGebra e o JavaScript, podem ser acessadas via links externos e exploram problemas geométricos e trigonométricos, ampliação e rotação de imagens e fractais. Concluímos que as atividades propostas são condizentes com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular - BNCC sobre o emprego de tecnologias digitais e o desenvolvimento do pensamento computacional nas competências específicas e habilidades para Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio.

Palavras-chave. Conjuntos de Julia, GeoGebra, JavaScript, Teorema Fundamental da Álgebra.

1 Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2] para Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio estabelece: 1. Competência Específica 1, Habilidade EM13MAT105: "Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)" ([2], p. 533); 2. Competência Específica 4, Habilidade EM13MAT405: "Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática" ([2], p. 539).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [3] recomendam que a Matemática no Ensino Médio não tenha apenas um caráter formativo ou instrumental, mas que também incentive os estudantes a explorarem diferentes formas de visualizar determinadas situações e problemas. Embora o ensino dos números complexos não seja contemplado diretamente na BNCC e seja considerado facultativo nos PCNs, ele pode ser abordado através de aplicações descritas nas competências específicas e habilidades da BNCC [18]. No entanto, essa tarefa é desafiadora, seja pela dificuldade de visualizar aplicações no cotidiano e relações interdisciplinares, seja pela ausência de um significado físico evidente para esses números [6, 21]. Diante disso, apresentamos neste trabalho atividades dinâmicas para introduzir/explorar os números complexos. As atividades, desenvolvidas no GeoGebra [12] e em JavaScript [15], podem ser empregadas na Licenciatura em Matemática e adaptadas para o Ensino Médio.

[1]ohsaito@gmail.com
[2]rudimarnos@utfpr.edu.br
[3]amoreira@estudoetrabalho.org.br

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0298

2 Números Complexos: Aplicações

Historicamente, a aceitação dos números complexos pela comunidade matemática não ocorreu de maneira simples. Muitos matemáticos resistiram à sua aceitação e tiveram dificuldades em reconhecer sua existência [5]. Seguindo as ideias de Pólya [19], para o qual a compreensão da Matemática se aprimora ao estudarmos os passos das descobertas históricas, Moreira [16] desenvolveu materiais interativos sobre números complexos que estão disponíveis em seu blog [17]. Neste, apresenta a história dos números complexos ao longo das décadas e as dificuldades enfrentadas para sua formalização como parte da Matemática.

Um desses materiais aborda o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), que estabelece que toda função polinomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, possui uma raiz no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos [9]. O TFA foi inicialmente demonstrado em 1799 pelo matemático, astrônomo e físico alemão Johann Karl Friedrich Gauss (1777–1855), em sua tese de doutoramento na Universidade de Helmstadt [13]. Moreira [16, 17] desenvolveu uma atividade interativa no GeoGebra que permite visualizar uma prova topológica do TFA para um polinômio de grau 4, conforme ilustra a Figura 1.

A atividade está disponível em https://www.geogebra.org/m/cwyk6r2T. Na página do GeoGebra, o controle deslizante r permite selecionar o raio do disco complexo. Ao clicarmos em “Ver as raízes (solução)”, a imagem à esquerda ilustra as raízes, destacando aquela localizada sobre a fronteira do disco. Na imagem à direita, observamos o retrato da órbita dessa raiz [1], cujo passo a passo da construção pode ser encontrado em https://complexos.blog.br/870/.

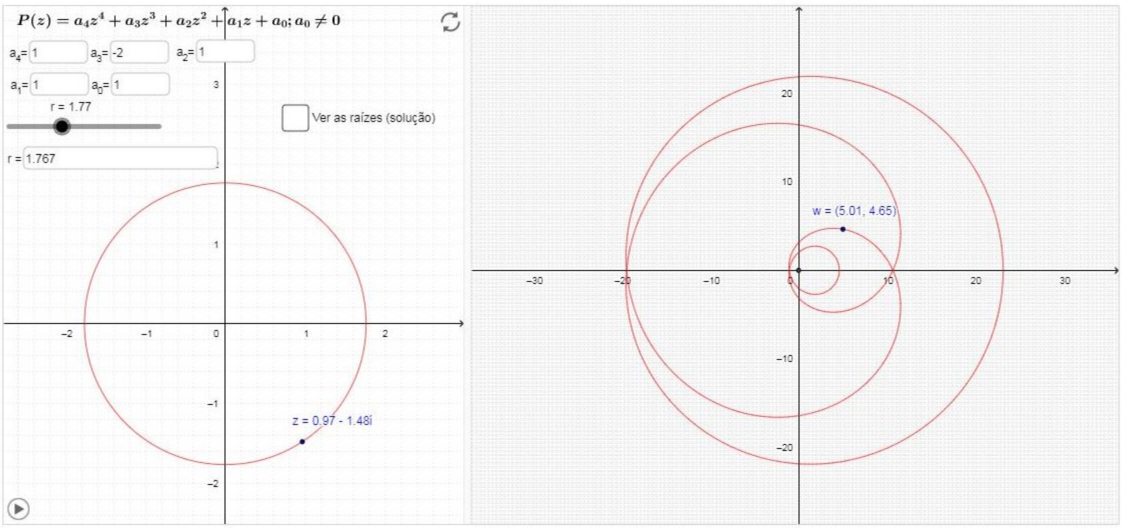


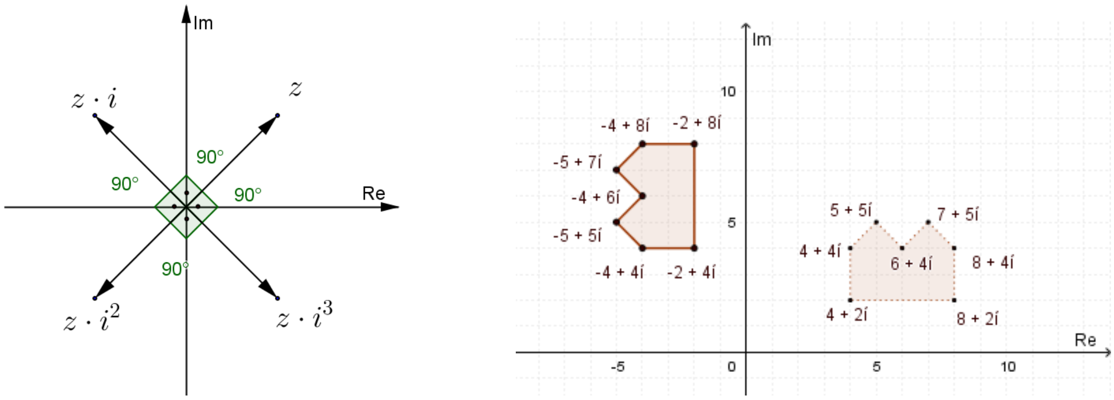
Figura 1: Raízes de um polinômio de grau 4. Fonte: Moreira [17].

Além do TFA, Moreira [16, 17] também aborda aplicações dos números complexos, como a rotação e o problema dos três quadrados, além de suas relações com fractais. Apresentamos essas aplicações considerando o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com suas operações e propriedades [4], onde $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária e $a, b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$.

2.1 Rotação: Multiplicando $z \in \mathbb{C}$ por i

Ao multiplicarmos um número complexo $z = x + yi$ pela unidade imaginária i, o produto será o número complexo $z \cdot i = -y + xi$. Os vetores que representam z e $z \cdot i$ são perpendiculares,

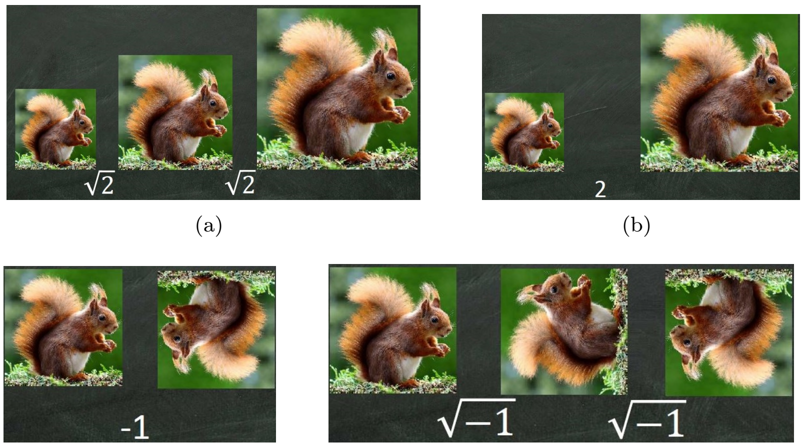
Figura 2(a), pois $|\overrightarrow{zi}|^2 + |\overrightarrow{z}|^2 = |\overrightarrow{z - zi}|^2$ (Teorema de Pitágoras [20]), ou ainda, $< x, y >< -y, x >= -xy + yx = 0$ (produto interno igual a zero). Na Figura 2(b), observamos a posição dos vértices de um polígono quando as coordenadas complexas dos vértices são multiplicados por i. Moreira [16, 17] organizou uma atividade interativa no GeoGebra, que está disponível em https://www.geogebra.org/m/SbdDT3bg, sobre a multiplicação por i e a rotação de polígonos.



(a) (b)

Figura 2: Multiplicação $z \cdot i$: (a) perpendicularidade; (b) rotação de polígonos. Fonte: Moreira [16].

A multiplicação por i também possibilita a rotação de imagens. A Figura 3(a) ilustra uma imagem multiplicada por $\sqrt{2}$ duas vezes; a Figura 3(b) ilustra a mesma imagem multiplicada por 2, o que equivale a multiplicar duas vezes por $\sqrt{2}$. A Figura 3(c) mostra o que ocorre com a imagem ao ser multiplicada por -1, enquanto que a Figura 3(d) ilustra que ocorre o mesmo ao multiplicarmos a imagem dada duas vezes seguidas por $\sqrt{-1} = i$, ou seja, há uma rotação de 90° da imagem em cada etapa.



(c) (d)

Figura 3: Ampliação (a)-(b) e rotação (c)-(d) de imagens. Fonte: Moreira [17].

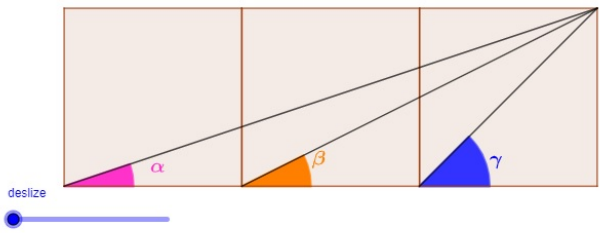
Moreira [17] estruturou uma ativade dinâmica sobre a rotação de imagens em seu blog, disponível em https://complexos.blog.br/758/.

2.2 O Problema dos Três Quadrados

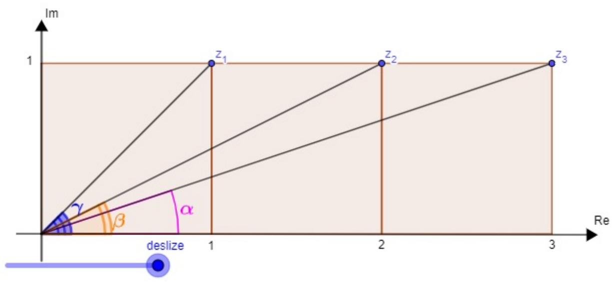
Gardner [11] apresenta o Problema 2.1, que é costumeiramente solucionado utilizando-se relações geométricas e trigonométricas.

Problema 2.1. *Colocando-se três quadrados lado a lado, e traçando linhas que unem os seus vértices inferiores esquerdos ao vértice superior direito do quadrado à direita, qual é a soma dos ângulos que as três linhas formam com a reta suporte das bases dos quadrados?*

Sejam α, β e γ os ângulos que as três linhas formam com a reta suporte das bases dos quadrados – Figura 4(a). Moreira [16, 17] propõe uma solução para o Problema 2.1 no plano complexo. O objetivo é mostrar que $\alpha+\beta+\gamma = 90°$ ou, equivalentemente, que $\gamma = \alpha+\beta$. Situando os quadrados no plano complexo – Figura 4(b), a soma $\alpha+\beta+\gamma$ é o argumento do produto dos números complexos $z_1 = 1+i, z_2 = 2+i$ e $z_3 = 3+i$, ou seja, $z = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (1+i)(2+i)(3+i) = 10i$, sendo que $z = 10i$ corresponde a 10 vezes a unidade imaginária representada por 1 no eixo imaginário Im. Logo, $z = 10(cos\,90^o + i\,sen\,90^o)$, com z na forma polar ou trigonométrica. Portanto, $\alpha+\beta+\gamma = Arg(z) = 90^o$.



(a)



(b)

Figura 4: Três quadrados: (a) lado a lado; (b) no plano complexo. Fonte: Moreira [17].

Moreira [16, 17] desenvolveu uma atividade dinâmica sobre o problema dos três quadrados no GeoGebra, disponível em `https://www.geogebra.org/m/Efhnpubb`.

3 Fractais: Conjunto de Julia

Um fractal é uma forma geométrica áspera, rugosa e fragmentada que pode ser dividida em partes menores e estas reproduzem o todo em uma escala reduzida [14]. O termo fractal foi cunhado por Benoit B. Mandelbrot (1924–2010), a partir do adjetivo latino *fractus*, cujo verbo correspondente *frangere* significa quebrar, criar fragmentos irregulares. A Figura 5 ilustra alguns modelos de fractais.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0298

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 12, n. 1, 2026.

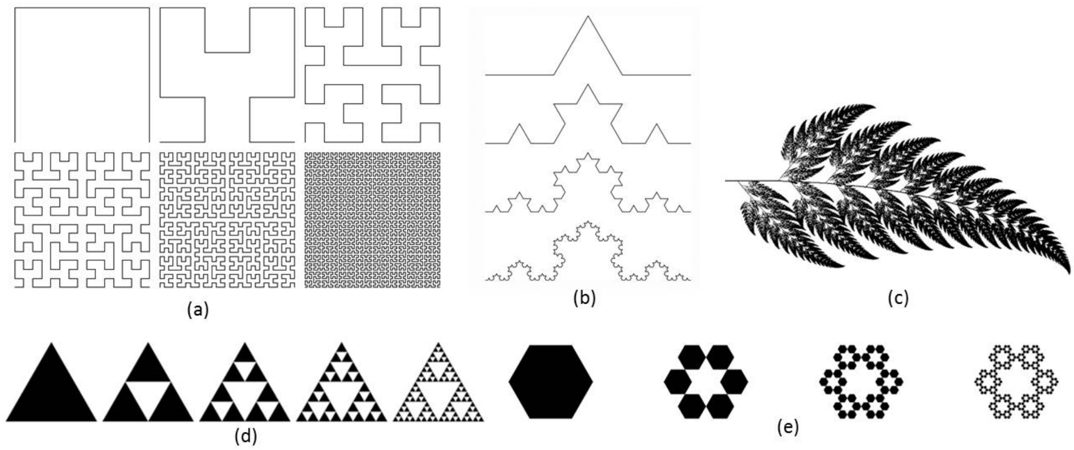
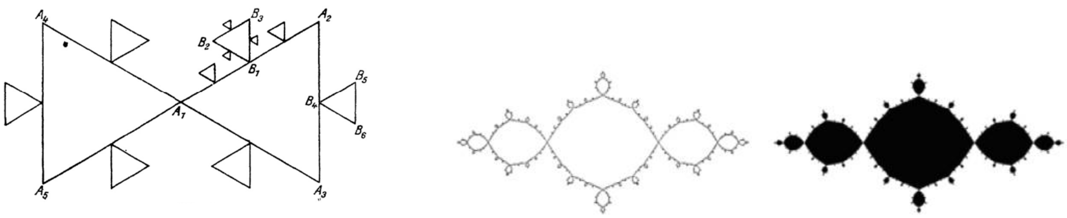


Figura 5: Fractais: (a) curva de Hilbert; (b) curva de Koch; (c) samambaia de Barnsley; (d) triângulo de Sierpinski; (e) Hexágono de Sierpinski. Fonte: Moreira [16].

O Conjunto de Julia Preenchido associado à função $f(z) = z^2+c$, $c \in \mathbb{C}$, é o conjunto dos valores de z para os quais a iteração $z \to z^2+c$ não diverge para o infinito. Já o Conjunto de Julia associado à função $f(z) = z^2 + c$ é a fronteira do Conjunto de Julia Preenchido correspondente [8]. Para quase todos os valores de c, o Conjunto de Julia obtido é um fractal [10]. Com o desenvolvimento da computação, pode-se calcular mais pontos e melhorar a visualização desses conjuntos. A Figura 6(a) ilustra a primeira imagem conhecida de um Conjunto de Julia; na Figura 6(b), Moreira [16, 17] reproduziu em JavaScript o Conjunto de Julia e o Conjunto de Julia Preenchido associados à função $f(z) = z^2 - 1$, onde $c = -1 + 0i$.



(a) (b)

Figura 6: (a) Primeira imagem conhecida de um conjunto de Julia; (b) Conjunto de Julia e Conjunto de Julia Preenchido da função $f(z) = z^2 - 1$. Fonte: (a) Cremer [7]; (b) Moreira [16].

As imagens dos fractais dos Conjuntos de Julia Preenchidos são obtidas quando, com o auxílio de computadores, testa-se uma quantidade muito grande de condições iniciais z_0 para um determinado c. Quando uma condição z_0 não diverge, marca-se esse ponto no plano complexo e repete-se o teste para outro número na vizinhança. Em Moreira [16] há uma descrição do passo a passo para gerar um Conjunto de Julia Preenchido. A Figura 7 mostra alguns Conjuntos de Julia Preenchidos associados à $f(z) \mapsto z^2 + c$ obtidos a partir desse procedimento.

Moreira [17] organizou uma atividade que possibilita a visualização dos Conjuntos de Julia a partir do Conjunto de Mandelbrot[4]. Essa atividade, desenvolvida em JavaScript, está disponível em https://complexos.blog.br/fractals/julia/julia.html.

[4]O Conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os números complexos c para os quais a iteração $z \to z^2 + c$,

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0298

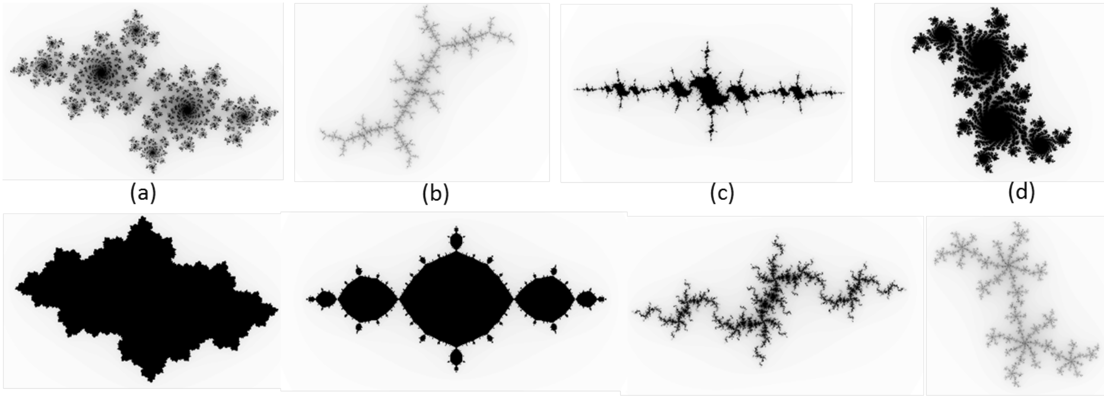


Figura 7: Conjuntos de Julia Preenchidos para: (a) $c = -0,65 + 0,4i$; (b) $c = -0,1 - 0,9i$; (c) $c = -1,3 + 0,05i$; (d) $c = 0,2 + 0,55i$; (e) $c = -0,6 + 0,2i$; (f) $c = -1,0 + 0i$; (g) $c = -1,01 + 0,28i$; (h) $c = 0,16 + 0,66i$. Fonte: Moreira [16].

4 Considerações Finais

Os números complexos desempenham um papel fundamental na solução de diversos problemas geométricos, permitindo soluções mais elegantes e concisas. A aplicabilidade desses números vai além da abstração algébrica, oferecendo uma perspectiva visual e interativa que aprimora a compreensão dos conceitos matemáticos. Desta forma, apresentamos neste trabalho atividades dinâmicas, elaboradas no GeoGebra e em JavaScript, para investigar propriedades e aplicações dos números complexos.

Uma das aplicações exploradas é a geração de fractais, uma vez que a riqueza visual das imagens fractais se destaca como recurso motivador no ensino dos números complexos e no estudo de sequências de funções. Além dos fractais, também abordamos o Teorema Fundamental da Álgera, a rotação de imagens e o problema dos três quadrados. Moreira [16] descreve outras aplicações interessantes em Física, tais como oscilações e ondas, impedância complexa em circuitos RLC e o processamento digital de sinais.

Apesar da BNCC não incluir explicitamente o conjunto dos números complexos nas habilidades para Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio, é importante destacar que o professor de Matemática na Educação Básica precisa apresentar esse conjunto ao abordar a solução de equações quadráticas com discriminante negativo.

Por fim, esperamos que este trabalho contribua à contextualização no ensino dos números complexos, seja na Licenciatura em Matemática, seja em adaptações propostas à Educação Básica.

Referências

[1] H. C. Botós. **Uma prova celestial do teorema fundamental da álgebra**. Online. Acessado em 08/02/2025, `https://www.cemeai.icmc.usp.br/actalegalicus/wp-content/uploads/2022/09/ProvaCelestialAlgebra.pdf`.

[2] Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. Online. Acessado em 12/02/2025, `https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC\_EI\_EF\_110518\_versaofinal.pdf`.

tomada a partir de $z_0 = 0$, não diverge para o infinito ou, equivalentemente, é o conjunto de números complexos c para os quais o Conjunto de Julia associado à $f(z) = z^2 + c$ é conexo [10].

[3] Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da Natureza**. Online. Acessado em 03/03/2025, `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf`.

[4] M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner. **Trigonometria e números complexos**. 3a ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992. ISBN: 85-85818-08-5.

[5] J. P. Carneiro. "A geometria e o ensino dos números complexos". Em: **Revista do Professor de Matemática** 55 (2004), pp. 15–25.

[6] E. G. Chavez. "Teaching complex numbers in high school". Dissertação de mestrado. Louisiana State University, Agricultural e Mechanical College, 2014.

[7] H. Cremer. "Über die iteration rationaler funktionen". Em: **Jber. d. Dt. Math. Verein.** 33 (1925).

[8] K. Falconer. **Fractal geometry: Mathematical foundation and applications**. 3a. ed. Chichester: Wiley, 2014. ISBN: 978-1-119-94239-9.

[9] C. de S. Fernandez e R. A. dos Santos. **O teorema fundamental da álgebra**. Online. Acessado em 07/03/2025, `https://mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC5Completo.pdf`.

[10] M. Frame, B. Mandelbrot e N. Neger. **Fractal geometry**. Online. Acessado em 04/02/2025, `https://users.math.yale.edu/public\_html/People/frame/Fractals/`.

[11] M. Gardner. **Mathematical circus**. 1a ed. Mathematical Association of America (MAA), 1996. ISBN: 978-0883855065.

[12] GeoGebra. **Ferramentas e recursos do GeoGebra**. Online. Acessado em 08/02/2025, `https://www.geogebra.org/`.

[13] A. Gonçalves. **Introdução à álgebra**. 5a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. ISBN: 978-85-244-0108-4.

[14] N. Lesmoir-Gordon, W. Rood e Edney. R. **Introducing fractals: a graphical guide**. 1a ed. London: Icon Books, 2013. ISBN: 9781848310872.

[15] MDN. **JavaScript**. Online. Acessado em 08/02/2025, `https://developer.mozilla.org/pt-BR/docs/Web/JavaScript`.

[16] A. A. Moreira. "Motivação para o ensino e aprendizagem dos números complexos: uma abordagem com aplicações". Dissertação de mestrado. UTFPR, Curitiba, 2018.

[17] A. A. Moreira. **Um blog sobre os números complexos: Recursos digitais para tornar as aulas sobre os números complexos mais interessantes**. Online. Acessado em 05/02/2025, `https://complexos.blog.br/`.

[18] R. L. Nós, O. H. Saito e M. A. dos Santos. "Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos". Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 11 (2017), pp. 48–64. DOI: `10.21167/cqdvol11201723169664rlnohsmas4864`.

[19] G. Pólya e L. Bowden. **Mathematical methods in science**. 1a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. ISBN: 978-0883856260.

[20] V. M. R. da Silva, R. L. Nós e M. Sano. "Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra". Em: **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo** 12(1) (2023), pp. 62–77. DOI: `10.23925/2237-9657.2023.v12i1p062-077`.

[21] D. Tirosh e N. Almog. "Conceptual adjustments in progressing from real to complex numbers". Em: **Proceeding of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Vol. 3. 1994, pp. 221–227.

