Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Visualizando a Mudança de Base de Logaritmos Geometricamente

Leonardo C. Biasotto[1]
FAT, Tapejara, RS
Paulo R. Bösing[2]
UFFS, Chapecó, SC

Resumo. Este artigo tem como principal objetivo descrever uma tarefa exploratório-investigativa, indicada para professores, para conduzir o ensino da propriedade da mudança de base dos logaritmos a partir de uma abordagem geométrica, utilizando gráficos de funções logarítmicas. Para isso, faz-se uso do software GeoGebra e tem-se como base teórica a Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Paul Ausubel.

Palavras-chave. Logaritmos, GeoGebra, Teoria da Aprendizagem Significativa, Tarefas Exploratório-Investigativas

1 Introdução

Ausubel propõe em [1] que, para que a aprendizagem seja significativa devem ser levados em consideração os conhecimentos prévios do indivíduo. Estes conhecimentos estariam organizados em uma estrutura cognitiva que, conforme ([10], p. 8), trata-se de "[...] uma estrutura hierárquica de conceitos que são abstrações da experiência do indivíduo." Ainda, para que a aprendizagem significativa ocorra, duas condições devem ser satisfeitas: o estudante precisa estar predisposto a aprender e o material didático precisa ser potencialmente significativo.

A proposta abordada neste artigo, que compreende um recorte de uma tarefa descrita em [2], propõe trabalhar a propriedade da mudança de base de logaritmos utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra aliado a uma tarefa exploratório-investigativa, de modo que as duas condições para a ocorrência da Aprendizagem Significativa sejam cumpridas.

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter, em 2001, e tem grande serventia em diversas áreas das ciências exatas, podendo ser utilizado de modo offline, o que facilita seu uso em instituições de ensino que possuem difícil acesso à internet. Sua interface permite que se relacionem conceitos algébricos e geométricos, por meio da exibição de uma janela algébrica e outra geométrica, de modo a proporcionar e facilitar ao seu usuário a visualização de duas representações de um mesmo objeto matemático [8].

No que tange às tarefas com caráter exploratório-investigativas, verifica-se que elas possuem um grande potencial significativo, dado que, como traz ([2], p. 36),

> Num ensino-aprendizagem exploratório, a teoria não surge em primeiro lugar, na realidade, numa primeira fase, parte-se de tarefas que envolvam fortemente os alunos na sua realização e, numa segunda fase, há um momento de discussão, reflexão e clarificação dos conteúdos trabalhados.

[1]leocbiasotto@gmail.com
[2]paulo.bosing@uffs.edu.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 12, n. 1, 2026.

Ou seja, ao executar tarefas exploratório-investigativas, o estudante coloca-se como sujeito ativo do processo de ensino e aprendizagem, o que tende a despertar sua pré-disposição a aprender e torna o material manipulado por ele potencialmente significativo. Indo ao encontro disto, ([2], p. 35) também explica que "[...] no ensino-aprendizagem exploratório, não cabe ao professor explicar a matéria na íntegra, ou seja, há uma parte significativa do trabalho de construção do conhecimento através da descoberta para os alunos realizarem".

Ao trabalhar com tarefas exploratório-investigativas, muitas vezes faz-se necessário que os alunos recorram a pensamentos indutivos para se chegar a conclusões, a partir da visualização de padrões. Diniz e Silva ([4], p. 3) falam sobre a importância de tal pensamento vinculado à "[...] construção de generalizações, a partir dos resultados experimentados e testados, servindo como explicação para outros estudos que apresentem casos similares [...]". Silva ([11], p. 30) também defende que "[...] o raciocínio indutivo pode dar significado à álgebra na sala de aula, já que a álgebra generaliza resultados particulares e permite manipular essas generalizações mantendo a veracidade dos resultados [...]".

A escolha do logaritmo como tema de pesquisa justifica-se dadas as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao depararem-se com esse conteúdo. Soares [12] entende que estas dificuldades são muito impactadas pelo fato dos professores não se aprofundarem no conteúdo, dando a ele uma abordagem bastante algébrica, desvinculando-o de sua história pregressa e aplicações. Indo ao encontro desta visão, ([7], p. 65) afirmam que "[...] as dificuldades apresentadas devem-se ao fato de que, do ponto de vista da aquisição de um conhecimento, este não pode ser gerado a partir da definição algébrica, definição esta que muitas vezes é memorizada". A importância dos logaritmos para a matemática é evidenciada por [6] que os coloca no mesmo patamar da notação indo-arábica, das frações decimais e dos modernos computadores, uma vez que, quando foram descobertos, "[...] aumentavam enormemente a capacidade de computação dos astrônomos" ([9], p. 3).

Assim, considerando a necessidade de um olhar diferenciado para o ensino de logaritmos dada a sua relevância para a matemática, o que se propõe neste artigo é apresentar uma proposta didática para se trabalhar em sala de aula a propriedade de mudança de base dos logaritmos sob uma abordagem geométrica, vinculando-a ao gráfico de uma função logarítmica. Para tal, é necessário que os alunos já tenham tido contato com a ideia de gráfico de função logarítmica, com a definição de logaritmo e com suas propriedades operatórias básicas. Uma sequência didática que promove o ensino destes tópicos foi previamente proposta na Seção 4.2 de [3], de onde este artigo originou-se.

2 Apresentando a Propriedade de Mudança de Base de Logaritmos

Inicialmente, para fins de rigor matemático, define-se o logaritmo de um número real positivo e prova-se a propriedade da mudança de base de logaritmos.

Definição 2.1. *(Logaritmo) Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$. O logaritmo de base a do logartimando b, denotado por $\log_a(b)$ (lê-se "logaritmo de b na base a" ou "logaritmo de base a de b"), é definido a partir da bimplicação:*

$$\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b. \tag{1}$$

Proposição 2.1. *(Mudança de base) Sejam $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1,\ c \neq 1$. Então,*

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}. \tag{2}$$

Demonstração: A partir da Definição 2.1, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, tais que, $\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b$, $\log_c(b) = y \Leftrightarrow c^y = b$ e $\log_c(a) = z \Leftrightarrow c^z = a$. Logo, $c^z = a \Rightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y$. Segue que $c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow \log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$.

Corolário 2.1. *Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Então,*

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}. \tag{3}$$

Demonstração: Segue da Proposição 2.1 tomando $c = b$.

Proposição 2.2. *Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Então,*

$$a^{\log_a(b)} = b. \tag{4}$$

Demonstração: Como $\log_a(b) = \log_a(b)$, segue da Definição 2.1 que a equação (4) é válida.

No Ensino Médio, as funções logarítmicas mais utilizadas em exemplos ou exercícios são aquelas de base 10 (funções logarítmicas decimais), de base 2 (funções logarítmicas binárias) e as de base e (funções logarítmicas naturais ou neperianas).

Indo ao encontro disto, a Proposição 2.1, ou seja, a propriedade de mudança de base de logaritmos, permite que se migre para a base que for mais conveniente. Por exemplo, ao tomar as funções $g(x) = \log_a(x)$ e $h(x) = \log_b(x)$, têm-se

$$g(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} \log_b(x). \tag{5}$$

Do Corolário 2.1, segue que $g(x) = \log_a(b) \log_b(x)$. Logo, $g(x) = \log_a(b)h(x)$, ou seja, toda função logarítmica de base a é equivalente a uma função logarítmica de base b multiplicada pelo fator $\log_a(b)$, proveniente da mudança de base.

É a partir desta relação existente entre duas funções logarítmicas que se construiu a sequência didática para se trabalhar com a mudança de base de logaritmos.

3 Uma Alternativa para se Ensinar a Propriedade da Mudança de Base de Logaritmos

Uma vez que os estudantes tenham interagido com a noção de composição de funções logarítmicas a partir de seus gráficos (veja sequência didática apresentada na Seção 4.1.5.2 de [3]), e tenham também visualizado geometricamente as quatro propriedades elementares dos logaritmos (tarefas descritas na Seção 4.2.3 de [3]), sugere-se utilizar a sequência de tarefas proposta a seguir.

O processo inicia com a construção dos gráficos das funções $p(x) = \log_2(x)$ e $q(x) = \log_3(x)$ no GeoGebra, ilustrado na Figura 1. Com ambos visíveis, retoma-se a discussão já supostamente iniciada anteriormente sobre o formato do gráfico da função logarítmica, sempre levando em conta que as curvas logarítmicas, apesar de diferentes umas da outras, possuem formato semelhante e podem ser obtidas por meio de ampliações ou reduções (“esticamentos” ou “achatamentos” verticais) de uma mesma curva a partir de um parâmetro. Ou seja, as funções p e q apesar de possuírem bases diferentes, possuem o mesmo formato de gráfico: a curva logarítmica. De fato, é possível verificar isso visualmente, conforme mostra a Figura 1.

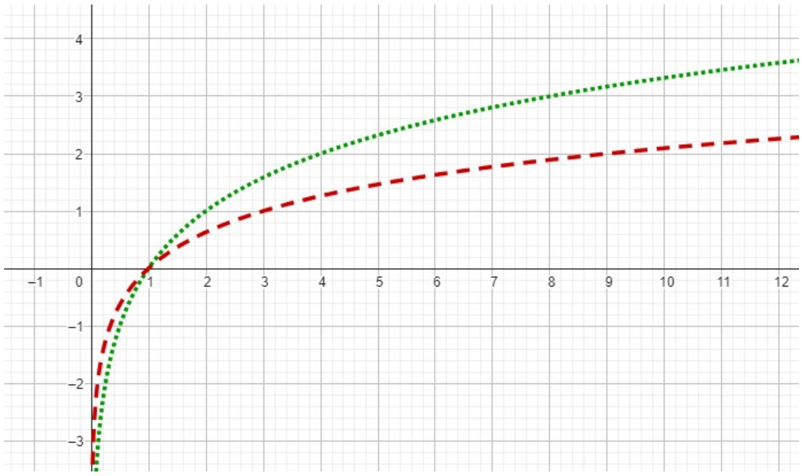

Figura 1: Comparação dos gráficos das funções $p(x) = \log_2(x)$ (em verde pontilhado) e $q(x) = \log_3(x)$ (em vermelho tracejado). Fonte: elaborada pelos autores.

Considerando as noções de isometrias e homotetias de gráficos de funções, é como se a função p tivesse sido reduzida, ou "achatada", para se transformar na função q (ou então q foi ampliada, "esticada", para gerar p). Logo, existe $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, tal que:

$$q(x) = ap(x) \Rightarrow \log_3(x) = a \log_2(x). \tag{6}$$

O objetivo desta tarefa é, portanto, determinar tal a. Inclusive, já é possível inferir que $a \in (0,\ 1)$, exatamente pelo fato de p ter sido "achatada", o que implica que o fator que a multiplica deve ser inferior a 1.

Para isso, utiliza-se a propriedade explicitada na Proposição 2.2. Deste modo, escreve-se 3 como $2^{\log_2(3)}$. Deve ficar claro aos alunos que a escolha do 2 como base foi influenciada pela base da função p, a qual se está interessado em manipular. Logo, $\log_3(x)$ pode ser reescrito como:

$$\log_3(x) = \log_{2^{\log_2(3)}}(x). \tag{7}$$

Mas a propriedade da potência na base do logaritmo, que já deve ter sido discutida e sistematizada com os alunos, permite obter:

$$\log_{2^{\log_2(3)}}(x) = \frac{1}{\log_2(3)} \log_2(x). \tag{8}$$

Finalmente, depara-se com a igualdade

$$\log_3(x) = \frac{1}{\log_2(3)} \log_2(x), \tag{9}$$

de tal modo que se encontra $a = \frac{1}{\log_2(3)}$, o fator pelo qual se deve multiplicar a função p para gerar q. Sugere-se utilizar uma calculadora para verificar que, de fato, $\frac{1}{\log_2(3)} < 1$. É possível utilizar o próprio GeoGebra para mostrar que as funções $q(x) = \log_3(x)$ e $s(x) = ap(x) = \frac{1}{\log_2(3)} \log_2(x)$ possuem o mesmo gráfico (ou seja, sobrepõem-se), conforme ilustra a Figura 2.

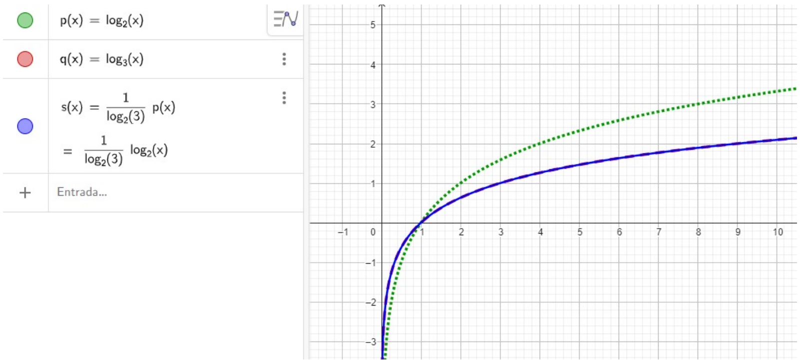

Figura 2: Visualização final da tarefa (os gráficos das funções q e s se sobrepõe). Fonte: elaborada pelos autores.

Com este processo, obtém-se a igualdade reescrita como $\log_3(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(3)}$. Sugere-se pedir, então, aos estudantes que a analisem, a fim de buscar um padrão entre o primeiro e o segundo membro. É válido também realizar o mesmo processo para encontrar o fator a com outras funções, de modo que eles percebam alguma recorrência, tais como:

- $p(x) = \log_5(x)$ e $q(x) = \log_2(x)$;
- $p(x) = \log_3(x)$ e $q(x) = \log_{10}(x)$;
- $p(x) = \log_2(x)$ e $q(x) = \log_3(x)$.

No último item, especificamente, pede-se que se encontre $a > 1$ que amplia q para gerar p, ou seja, o processo inverso do que foi feito anteriormente, processo intimamente relacionado ao Corolário 2.1. O resultado desta última tarefa exploratório-investigativa pode ser usado posteriormente para generalizar tal propriedade complementar da mudança de base.

De modo geral, a ideia é fazer com que os estudantes percebam que, independentemente da escolha das bases b e c, respectivamente, das funções p e q, a relação de igualdade final entre estas duas funções sempre leva em consideração b e c escolhidos.

De fato, se $p(x) = \log_b(x)$ e $q(x) = \log_c(x)$ são tais que $q(x) = ap(x)$, seguindo o mesmo passo a passo desenvolvido no exemplo numérico, tem-se:

$$q(x) = \log_c(x) = \log_{b^{\log_b(c)}}(x) = \frac{1}{\log_b(c)}\log_b(x) = \frac{1}{\log_b(c)}p(x). \tag{10}$$

Ou seja, $a = \frac{1}{\log_b(c)}$ e $\log_c(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(c)}$.

Esta condução pode ser feita com os alunos lado a lado com a construção numérica já executada, a fim de que relacionem a generalização com o caso específico, facilitando a compreensão.

Neste momento, recorre-se ao pensamento indutivo dos alunos, com a intenção de que percebam como $\log_c(x)$ pode ser reescrito como o quociente $\frac{\log_b(x)}{\log_b(c)}$, ou seja, uma divisão entre os logaritmos de uma base nova ($b \in \mathbb{R}_+^*, b \neq 1$), do logartimando e da base, respectivamente, do logaritmo original.

É importante notar que a escolha de utilizar gráficos de funções logarítmicas e o resultado $a^{\log_a(x)} = x$ para se trabalhar a propriedade da mudança de base funciona como um contraponto ao que foi feito na sequência didática proposta na Seção 4.1 de [3], onde tal propriedade foi construída a partir de análises numéricas e raciocínios puramente indutivos.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0349

4 Considerações Finais

Propostas que vinculam entes algébricos às representações geométricas são de extrema riqueza em um ambiente de sala de aula, pois, como destaca [13], utilizar abordagens geométricas para resolver problemas algébricos é uma estratégia válida para intensificar a aprendizagem de tais conceitos, pois permite que o estudante compreenda um mesmo conceito de diferentes maneiras e formas, mas que se interligam. Tarefas como estas também vão ao encontro de ([5], p. 270), quando afirma que "[...] é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis."

Portanto, quando o professor consegue relacionar a propriedade de mudança de base de logaritmos, como explicitado nesse artigo, com gráficos de funções logarítmicas, utilizando no processo tecnologias digitais e tarefas exploratório-investigativas, o aluno é colocado em um ambiente onde a ocorrência da Aprendizagem Significativa pode ser potencializada, uma vez que ele tem contato com um material potencialmente significativo e passa, assim, a desenvolver uma predisposição maior a aprender.

Referências

[1] D. P. Ausubel. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune e Stratton, 1963. ISBN: 978-0808900252.

[2] E. M. Barbosa. "Práticas de um professor, participação dos alunos e pensamento algébrico numa turma de 7º Ano de escolaridade". Tese de doutorado. Instituto de Investigação e Formação Avançada. Universidade de Évora, 2019.

[3] L. C. Biasotto. "Estratégias para o ensino de logaritmos visando a aprendizagem significativa". Dissertação de mestrado. Universidade Federal da Fronteira Sul, 2025.

[4] C. R. Diniz e I. B. Silva. **Metodologia Científica**. Campina Grande; Natal: UEPB/UFRN - EDUEP, 2008. ISBN: 978-8587108982.

[5] R. Duval. "Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento". Em: **Revemat: Revista Eletônica de Educação Matemática** 7.2 (2012). Tradução: M. T. Moretti, pp. 266–297. DOI: 10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

[6] H. Eves. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004. ISBN: 978-8526806573.

[7] R. L. Ferreira e E. Bisognin. "O estudo de logaritmos por meio de uma sequência de ensino: A engenharia didática como apoio metodológico". Em: **Revista Experiências em Ensino de Ciências** 2 (2007), pp. 1–15. ISSN: 1982-2413.

[8] GeoGebra. **Site oficial do GeoGebra**. Online. Acessado em 14/03/2025, https://www.geogebra.org.

[9] E. L. Lima. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 1996. ISBN: 978-8583370826.

[10] M. A. Moreira e E. Masini. **Aprendizagem significativa – A teoria de David Ausubel**. São Paulo: Editora Centauro, 2009. ISBN: 978-8588208766.

[11] B. A. da Silva. "A noção de raciocínio indutivo em construções matemáticas". Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Paraná, 2015.

[12] E. C. Soares. "Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula". Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

[13] M. Viana. **As guerras da equação cúbica**. Online. Acessado em 14/03/2025, https://www.youtube.com/watch?v=bP9jyCaKYcc.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0349