Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uso de Novas Tecnologias na Disciplina de Cálculo: Uma Proposta para Aula de Integração

João M. S. da Costa[1]
UFF, Rio de Janeiro, RJ
Andréa Lins[2]
UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. As altas taxas de evasão e retenção em cursos de ciências exatas e engenharias são desafios persistentes e que exigem novas abordagens pedagógicas no Ensino Superior, especialmente em disciplinas como Cálculo, que apresentam elevados índices de reprovação. Neste artigo, propomos o uso do software GeoGebra e da linguagem de programação Python para tornar as aulas de Cálculo mais interativas e acessíveis. Como exemplo, abordamos o conceito de integrais definidas de polinômios, explorando sua construção histórica e desmistificando a necessidade da divisão uniforme do domínio de integração. Essa abordagem visa promover uma aprendizagem intuitiva e significativa através de uma compreensão visual e experimental do tema, tornando o aprendizado mais dinâmico e menos mecânico.
Palavras-chave. Ensino de Cálculo, Integrais Definidas, GeoGebra, Python, Novas Tecnologias.

1 Introdução

A evasão e a retenção de estudantes no Ensino Superior são questões críticas que afetam instituições educacionais globalmente. As taxas de evasão universitária estão aumentando em todo o mundo, influenciadas por uma combinação de fatores como questões socioeconômicas, desafios do aprendizado online, desempenho acadêmico, falta de identificação com o curso e mudanças nas expectativas dos estudantes [16, 17, 19, 21]. No contexto brasileiro, a evasão no Ensino Superior também é preocupante, ainda mais quando se trata de cursos de graduação em ciências exatas e engenharias, os quais frequentemente registram as maiores taxas de evasão e reprovação [4, 18, 27].

Dentre as disciplinas que compõem essas graduações, os cursos de Cálculo se destacam pelos altos índices de reprovação e evasão, tanto no Brasil quanto no exterior [1, 20, 22, 23]. O caráter abstrato dos conteúdos, aliado às dificuldades matemáticas prévias dos estudantes contribui para esse cenário. Com isso, verifica-se a necessidade de estratégias pedagógicas e institucionais que abordem as dificuldades enfrentadas pelos estudantes nessas disciplinas, visando reduzir as taxas de evasão e reprovação, além de promover uma melhor compreensão dos conteúdos.

Uma das abordagens promissoras para enfrentar esse problema é a incorporação de metodologias ativas [14, 15] e o uso de novas tecnologias no ensino de Cálculo. Ferramentas tecnológicas podem complementar a prática docente ao enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais dinâmico e interativo [11]. Em especial, o uso de softwares educativos e de linguagens de programação tem revelado significativo potencial para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos de natureza abstrata.

Neste trabalho, propomos o uso de softwares educativos aliados a códigos computacionais para desenvolver aulas dinâmicas e interativas que favoreçam o ensino e a aprendizagem dos conteúdos

[1] Joaom424@gmail.com
[2] andlins@lcg.ufrj.br

de Cálculo. Para exemplificar a nossa proposta, abordamos o conceito de integrais definidas de polinômios por meio de uma perspectiva histórica, fazendo uso do software de geometria dinâmica GeoGebra. Além disso, empregamos códigos computacionais em linguagem Python [28] para demonstrar que a divisão do domínio de integração em subintervalos igualmente espaçados não é obrigatória, desmistificando um conceito frequentemente apresentado nas aulas de Cálculo. Essa metodologia visa proporcionar aos estudantes uma compreensão mais intuitiva e exploratória do conceito de integração, promovendo um aprendizado mais eficaz e menos automatizado.

O artigo está estruturado da seguinte forma: na Seção 2, fazemos uma breve introdução sobre o uso de novas tecnologias no Ensino Superior; na Seção 3, utilizamos uma abordagem histórica do conceito de integração; na Seção 4, apresentamos a proposta metodológica baseada no uso do GeoGebra e da programação em Python; e, por fim, na Seção 5 discutimos as considerações finais e perspectivas futuras para a adoção dessas tecnologias no ensino de Cálculo.

2 O Uso de Novas Tecnologias no Ensino Superior

O avanço tecnológico tem proporcionado o surgimento de inúmeros recursos digitais, os quais podem ser incorporados ao ensino de Matemática para favorecer abordagens mais interativas e eficazes. O uso de tecnologias digitais permite a implementação de metodologias ativas [3, 10], nas quais os estudantes exploram conceitos matemáticos de forma dinâmica, o que contribui para a construção do conhecimento e promove um aprendizado mais significativo [24].

Na Educação Básica, as diretrizes educacionais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [5], os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) [7, 8], as Diretrizes Curriculares Nacionais(DCN's) [9] e o Plano Nacional de Educação (PNE) [6] enfatizam a importância do uso de recursos digitais no processo de ensino-aprendizagem. Entre esses recursos, destacam-se softwares educativos, aplicativos interativos e linguagens de programação, que podem ser usados para tornar os estudantes protagonistas no desenvolvimento do próprio conhecimento.

Diante dessa necessidade, as universidades também vêm reformulando seus currículos para incorporar tecnologias no Ensino Superior. Na Universidade Federal Fluminense, por exemplo, o Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática [13] foi atualizado com o objetivo de incentivar o uso de tecnologias digitais em todas as disciplinas, além de incluir uma disciplina específica sobre Novas Tecnologias no Ensino da Matemática.

3 Construção Histórica do Conceito de Integração

Atualmente, os cursos de Cálculo abordam a integração de forma teórica, sem considerar seu contexto histórico e desenvolvimento, tratando-a, ainda, unicamente como operação inversa da derivação. Nesse contexto, a integral é vista como um conjunto de técnicas algébricas a serem aplicadas. Essa abordagem teórica foi influenciada pelo processo de formalização pelo qual a Matemática passou durante o século XIX, no qual se priorizou o formalismo e a fundamentação lógica [25]. As mudanças ocorridas nesse período perduram até os dias atuais. Um exemplo disso é o conceito de integral de Riemann, estabelecido na Definição 3.1.

Definição 3.1 (Integral de Riemann). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, que divide o intervalo $[a, b]$ em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tomamos um ponto arbitrário $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Definimos a integral de Riemann de f em $[a, b]$ como:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

Se esse limite for finito, onde $\|P\|$ é o tamanho do maior subintervalo da partição formada pelos conjunto de pontos P, o somatório é chamado de soma de Riemann.

A Definição 3.1 engloba uma construção geométrica da integração, que costuma ser abordada de forma superficial, com o objetivo de chegar ao Teorema Fundamental do Cálculo e estabelecer uma relação algébrica entre derivação e integração. Contudo, esse tipo de enfoque não corresponde ao desenvolvimento histórico do conceito de integração.

Historicamente, as ideias que fundamentam a integração tiveram sua origem na Grécia Antiga, no século IV a.C. [12]. Durante esse período, os matemáticos buscavam formas de resolver problemas de cálculo de comprimento de arco, volume e área de figuras irregulares. O matemático Eudoxo criou o *método da exaustão* [25], o qual era usado para aproximar a área do círculo através de polígonos regulares inscritos e circunscritos.

No século III, Arquimedes investigou o mesmo problema, mas também considerando o volume, no qual faixas paralelas eram cortadas, pesadas e comparadas com outras, estabelecendo, assim, uma igualdade entre os dois objetos [12]. Esse método ficou conhecido como o *método do equilíbrio* e continha uma das primeiras ideias de divisão em partes infinitesimais, que seria posteriormente revisitada nos estudos de Cavalieri. O conceito de integral avançou no século XVI com os estudos sobre a *geometria dos indivisíveis* realizados por Cavalieri [12]. Esses estudos tiveram como foco o cálculo do volume, cujo objetivo era dividir o sólido irregular por meio de cortes em planos paralelos à base, de forma a ter o volume como uma soma de áreas com espessura infinitesimal.

Os estudos de Cavalieri, junto com as ideias de Eudoxo, tornaram possível a construção da definição de integral como conhecemos hoje. Eudoxo subdividia as formas geométricas, inscrevendo polígonos regulares até uma quantidade suficientemente grande, enquanto que com o método de Cavalieri a subdivisão não se restringia a polígonos (ou poliedros) regulares, dando origem ao cálculo da área (ou volume) em intervalos infinitesimais.

4 Proposta para o Ensino de Integrais Definidas

Nossa proposta tem como objetivo utilizar recursos de geometria dinâmica e códigos computacionais para permitir que os estudantes possam analisar a construção do conceito de integrais definidas de polinômios. Essa análise auxilia o estudante a construir a definição de integral, além de mostrar como os conceitos formais usados atualmente originam-se de ideias simples. Conhecer as ideias relacionadas na teoria possibilita que, em novas situações-problema, os estudantes tenham a habilidade de se adaptar e aplicar todo o conhecimento prévio.

A proposta é dividida em quatro etapas: 1) Abordar o desenvolvimento da definição de integrais historicamente; 2) Explorar a integral como área abaixo da curva aproximada por retângulos; 3) Questionar sobre o tipo de subdivisão e comparar a divisão uniforme e não uniforme; e 4) Verificar a convergência da soma de Riemann, utilizando o método dos mínimos quadrados.

Na primeira etapa, abordamos a construção do conceito de integral sob um ponto de vista histórico. Iniciamos com as ideias de Eudoxo e Arquimedes [12], seguimos pela construção de Cavalieri [2] e finalizamos com o desenvolvimento do Cálculo por Newton e Leibniz [26]. Estudamos a geometria empregada nos conceitos e mostramos aos estudantes que as grandes evoluções na Matemática começaram com ideias mais simples, que foram evoluindo ao longo dos anos. A definição formal não foi apresentada nesse momento, pois será construída nas etapas posteriores.

Na etapa seguinte, usamos o software de geometria dinâmica GeoGebra para construir a definição de integral, explorando a subdivisão do intervalo em retângulos. A partir de um número n de subdivisões de mesmo comprimento, construímos os retângulos de três formas diferentes: utilizando o menor valor da função f no subintervalo (soma inferior); considerando o máximo de f no subintervalo (soma superior); e usando o ponto médio entre $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$ (soma do ponto médio). A Figura 1 ilustra uma construção no GeoGebra para a função $f(x) = x^2$, com os valores para as somas inferior (vermelho-escuro), do ponto médio (vermelho) e superior (vermelho-claro), para cinco retângulos (esquerda) e noventa e cinco retângulos (direita). Essas três formas de construção fornecem a informação de que cada uma delas pode agregar um erro no cálculo da área. Além disso, temos um controle deslizante que possibilita aumentar ou diminuir o número n de retângulos. A parte final desta etapa é levar o estudante a perceber que a área total pode ser definida como um somatório das áreas dos retângulos.

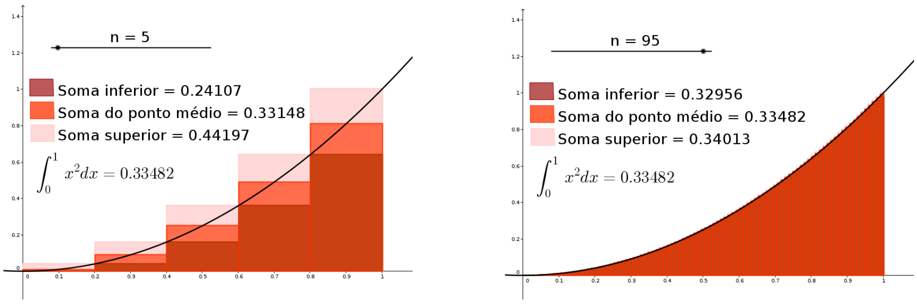

Figura 1: Conceito de integral utilizando intervalos uniformes e três formas de calcular a altura dos retângulos: usando os extremos inferior ou superior, ou o ponto médio do intervalo. Fonte: Autores.

Na terceira etapa, após os estudantes formalizarem a ideia de integral, analisamos um fator importante e que costuma ser pouco abordado nos livros de Cálculo. Neste momento, os estudantes devem ser questionados sobre a necessidade de subdividir o intervalo em partes de mesmo tamanho. Utilizamos um código computacional escrito na linguagem de programação Python, com as bibliotecas NumPy e Matplotlib, para comparar a subdivisão uniforme e não uniforme do intervalo. O objetivo desta análise é mostrar que a divisão em intervalos igualmente espaçados não é uma limitação estabelecida na definição. Ao modificar o número de pontos na subdivisão, é possível observar que ela pode ser tanto uniforme, quanto não uniforme, desde que o tamanho de cada subintervalo aproxime-se de zero. Nesta etapa, usamos uma função quadrática e mostramos que o resultado da área é o mesmo para cada subdivisão. Com essa validação, os estudantes são incentivados a formalizarem o conhecimento adquirido e, assim, observar a construção da definição da integral de Riemann. Ao formalizar o conhecimento, eles devem ser questionados sobre quais funções se beneficiariam mais de cada tipo de subdivisão. Espera-se que compreendam que, para funções definidas por partes, em que uma parte é paralela ao eixo x, a subdivisão não uniforme é mais adequada e explicamos os motivos com argumentação computacional. Na Figura 2, podemos observar os gráficos resultantes do código escrito em Python, onde é possível modificar o número de subdivisões do intervalo para ambos os casos: divisão uniforme (esquerda) e não uniforme (direita).

Para finalizar a proposta, mostramos como a soma de Riemann está relacionada com as fórmulas de integração apresentadas nos livros de cálculo. Esta última etapa é o momento em que a relação entre a derivação e a integração pode ser estabelecida. Utilizando o método de mínimos quadrados (código escrito em Python), aproximamos a função definida pelas somas parciais da soma de Riemann. Esse método permite que os estudantes observem que existem erros nas aproximações e que, ao reduzir o tamanho dos subintervalos, o erro se aproxima de zero. Como exemplo, usamos uma função quadrática na qual as somas parciais de Riemann constroem o gráfico de uma função cúbica. Com esta perspectiva, ampliamos o estudo para incluir a integração indefinida e o Teorema Fundamental do Cálculo.

A Figura 3 ilustra o gráfico formado pelas somas parciais da soma de Riemann considerando uma subdivisão uniforme (esquerda) e não uniforme (direita). No código, é possível imprimir o polinômio aproximado pelas somas parciais e assim mostrar que quando o tamanho dos intervalos

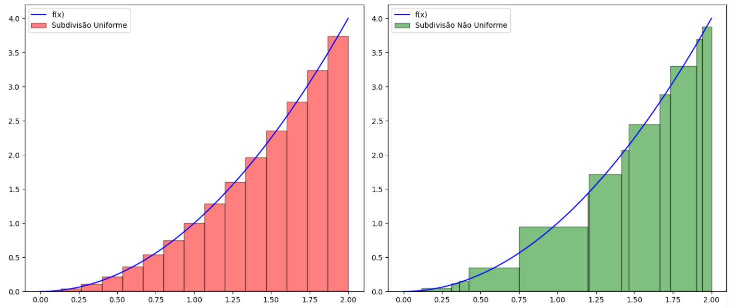

Figura 2: Função $f(x) = x^2$ com subdivisão uniforme (esquerda) e não uniforme (direita), utilizando o ponto médio como altura dos retângulos. Fonte: Autores.

se aproxima de zero, a soma converge para a função integral $f(x) = \frac{x^3}{3}$.

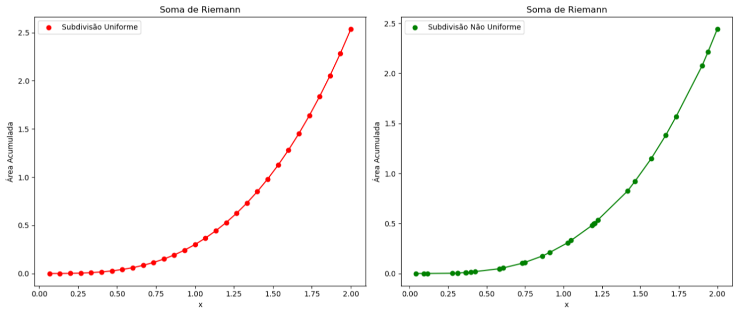

Figura 3: Somas parciais de Riemann e polinômio aproximado por mínimos quadrados utilizando trinta pontos, com subdivisão uniforme (esquerda) e não uniforme (direita). Fonte: Autores.

A relação com a derivação é obtida a partir de um questionamento aos estudantes sobre qual é a relação entre a função que integramos e a função aproximada. Isso permite que o estudante entenda como é possível chegar às fórmulas de integração que são apresentadas após a discussão do Teorema Fundamental do Cálculo.

5 Considerações Finais

O uso de novas tecnologias no ensino tem sido amplamente incentivado pelo Ministério da Educação, com diretrizes como a BNCC reforçando sua importância na Educação Básica. A crescente disponibilidade de softwares e recursos digitais oferece novas possibilidades para construção do conhecimento matemático, permitindo que os conceitos sejam compreendidos e interiorizados de forma mais eficaz.

Neste trabalho, propomos uma abordagem que alia ferramentas tecnológicas ao ensino de Cálculo, utilizando o software GeoGebra e a linguagem de programação Python para explorar o conceito de integrais definidas de polinômios. Nossa proposta demonstra que o uso de recursos digitais pode favorecer tanto professores quanto estudantes, promovendo um aprendizado mais intuitivo sem comprometer o rigor matemático. Além disso, ao incorporar a história da Matemática, conseguimos evidenciar a evolução natural das ideias que levaram à formulação moderna das integrais.

O estudo interativo dos conceitos, por meio de representações dinâmicas, permite que os estudantes desenvolvam um raciocínio mais profundo sobre a definição de integral, bem como sua relação com outros tópicos matemáticos, como comprimento de arco e volume, extrapolando o conhecimento para outras áreas. A abordagem com diferentes subdivisões no domínio da integração reforça a flexibilidade da definição, destacando seus impactos computacionais.

Por fim, a análise da convergência das somas aproxima o estudante da intuição por trás das fórmulas de integração, favorecendo uma melhor assimilação do conteúdo e incentivando a autonomia na construção do conhecimento matemático.

Referências

[1] B. M. E. Almeida, A. Queiruga-Dios e M. J. Cáceres. "Differential and integral calculus in first-year engineering students: a diagnosis to understand the failure". Em: **Mathematics** 9(1) (2020), p. 61. DOI: 10.3390/math9010061.

[2] L. K. B. de Araujo, J. N. S. de Alcantara e M. Chaquiam. "Recortes históricos sobre a constituição do conceito de integral". Em: **Lumen et Virtus** 16(44) (2025), pp. 77–89. DOI: 10.56238/levv16n44-006.

[3] L. Bacich e J. Moran. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. 3a. ed. Porto Alegre: Penso Editora, 2017. ISBN: 9788584291151.

[4] L. Bonaldo e L. N. Pereira. "Dropout: Demographic profile of Brazilian university students". Em: **Procedia-Social and behavioral sciences** 228 (2016), pp. 138–143. DOI: 10.1016/j.sbspro.2016.07.020.

[5] Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Acesso em: 13 nov. 2025. Brasília, 2017. URL: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.

[6] Brasil. **Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014: Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE**. Diário Oficial da União. Seção 1, p. 1-8, acesso em: 13 nov. 2025. 2014. URL: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm.

[7] Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Fundamental**. Ministério da Educação. Acesso em: 13 nov. 2025. 1997. URL: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf.

[8] Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio**. Ministério da Educação. Acesso em: 13 nov. 2025. 2000. URL: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf.

[9] Brasil. **Resolução CNE/CEB nº 4, de 13 de julho de 2010: Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica**. Diário Oficial da União. Seção 1, p. 10, acesso em: 13 nov. 2025. 2010. URL: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb004_10.pdf.

[10] J. Dewey. **Democracy and education**. 1a. ed. Nova Iorque: Columbia University Press, 2024. DOI: 10.2307/2178611.

[11] L. Diković. "Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level". Em: **Computer Science and Information Systems** 6(2) (2009), pp. 191–203. DOI: 10.2298/CSIS0902191D.

[12] H. Eves. **Introdução à história da matemática**. 1a. ed. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008. ISBN: 978-0-123456789.

[13] Universidade Federal Fluminense. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. UFF. Acesso em: 13 nov. 2025. 2024. URL: https://matematica.uff.br/wp-content/uploads/sites/819/2024/06/PCC-LicenciaturaMatem%C3%A1tica-UFF.pdf.

[14] L. S. Fontes. "As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral". Tese de doutorado. UNB, 2022. ISBN: 2358-8829.

[15] L. S. Fontes e C. H. Gontijo. "Autoavaliação de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral sobre atividades com uso de metodologias ativas". Em: **Anais do IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)**. Acesso em: 13 nov. 2025. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Natal, RN, 2024, pp. 1–14. URL: `https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/390/546`.

[16] A. Guzmán, S. Barragán e F. C. Vitery. "Dropout in rural higher education: A systematic review". Em: **Frontiers in Education**. Vol. 6. Frontiers Media SA. 2021. DOI: `10.3389/feduc.2021.727833`.

[17] M. Klitzke e F. Carvalhaes. "Fatores associados à evasão de curso na UFRJ: uma análise de sobrevivência". Em: **Educação em Revista** 39 (2023). DOI: `https://doi.org/10.1590/0102-469837576`.

[18] M. Klitzke e F. Carvalhaes. "Student dropout in a brazilian public university: a survival analysis". Em: **Educação em Revista** 39 (2023). DOI: `10.1590/0102-469837576t`.

[19] Á. Kocsis e G. Molnár. "Factors influencing academic performance and dropout rates in higher education". Em: **Oxford Review of Education** (2024), pp. 1–19. DOI: `10.1080/03054985.2024.2316616`.

[20] A. Lopes. "Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS". Em: **Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro** 26(27) (1999). Acesso em: 13 nov. 2025, pp. 123–146. URL: `https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n26_n27_Artigo05.pdf`.

[21] O. Lorenzo-Quiles, S. Galdón-López e A. Lendínez-Turón. "Factors contributing to university dropout: a review". Em: **Frontiers in Education**. Vol. 8. Frontiers Media SA. 2023. DOI: `10.3389/feduc.2023.1159864`.

[22] C. M. Rosa, K. B. Alvarenga e F. F. T. dos Santos. "Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso". Em: **Revista Internacional de Educação Superior** 5 (2019). DOI: `https://doi.org/10.20396/riesup.v5i0.8653091`.

[23] I. Q. Macambira e L. S. Athayde. "Reprovação na disciplina cálculo nos cursos de engenharia: análise de dados e métodos minimizadores". Em: **XLII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia** (2014). Acesso em: 13 nov. 2025. URL: `https://www.abenge.org.br/cobenge/legado/arquivos/5/Artigos/128885.pdf`.

[24] J. Moran. "Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda". Em: **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.** (2018), pp. 02–25. DOI: `10.5335/rep.v28i2.9002`.

[25] T. A. S. Ribeiro. "Cálculo Diferencial e Integral: abordagem histórica." Em: **Jornada Científica** 1(2) (2016). Acesso em: 13 nov. 2025. URL: `https://l1nk.dev/c0yKl`.

[26] T. Roque. **História da matemática**. 1a. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. ISBN: 978-85-3780-888-7.

[27] D. B. Silva et al. "Evasão no ensino superior público do Brasil: estudo de caso da Universidade de São Paulo". Em: **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas)** 27(2) (2022), pp. 248–259. DOI: `https://doi.org/10.1590/S1414-40772022000200@003`.

[28] P. Silveira. **Ensinar e Aprender Lógica de Programação com Python**. São Paulo: Caelum Educação, 2020. ISBN: 978-85-66250-91-5.

