Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

# Produto Funcional de Grafos: Um Modelo para Conexão de Sistemas Multiagentes

**Abel Rodolfo Garcia Lozano**
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Departamento de Matemática
Universidade do Grande Rio – Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
E-mail: arglozano@terra.com.br

**Angelo Santos Siqueira**
Universidade do Grande Rio – Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Universidade Federal do Rio de Janeiro – Programa de Pós-Doutorado em Engenharia de Produção
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
E-mail: asiqueira@unigranrio.com.br

**Clícia Valladares Peixoto Friedmann**
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Departamento de Matemática
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e Computacional
E-mail: cliciavp@terra.com.br

**Samuel Jurkiewicz**
Universidade Federal do Rio de Janeiro – Programa de Engenharia de Produção
E-mail: jurki@pep.ufrj.br

***Resumo:*** *Neste trabalho, os conceitos de produto funcional e coloração total equilibrada em grafos foram utilizados para propor um modelo de conexão entre sistemas multiagentes. Para isso, expomos de forma breve, a ideia de produto funcional, definimos redes de interconexão e sistemas multiagentes, e finalizamos propondo um modelo de conexão entre dois sistemas multiagentes, tomando como base a coloração total equilibrada e o produto funcional de grafos.*

## Introdução

Lozano *et. al.* (2008) utilizaram a coloração total equilibrada em grafos para obter uma representação natural para o processamento paralelo em redes de interconexão, respeitando a conjectura de Vizing. A partir deste estudo, Siqueira (2011) e Lozano *et. al.* (2012) desenvolveram um estudo sobre a construção de novas topologias de redes de interconexão, a partir da coloração total equilibrada em grafos regulares, com $\Delta + 2$ cores, no máximo. Apesar de na atualidade o conceito de redes de interconexão, da forma que aparece no trabalho original, seja pouco utilizado, o conceito de sistemas multiagentes vem ganhando cada vez mais espaço e aplicabilidade, conforme mostra Reis (2003). É sobre este tripé (coloração total equilibrada em grafos, produto funcional e sistemas multiagentes) que este trabalho se apoia.

Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente abordamos o conceito de produto funcional de grafos, que generaliza a ideia de produto cartesiano. Em seguida, adentramos no aspecto computacional com modelos de redes de interconexão, juntamente com os sistemas multiagentes, e finalizamos o trabalho apresentando um exemplo de conexão entre dois sistemas multiagentes, utilizando como base o produto funcional.

## Produto Funcional de Grafos

Conceitos introdutórios sobre grafos e coloração podem ser encontrados em Bondy e Murty (1976), Yap (1986), Boaventura Netto (1996) e Yap (1996). Conceitos mais específicos sobre coloração, podem ser vistos em Lozano (2005) e Lozano *et. al.* (2009). Para as definições de produto cartesiano de grafos, produto cartesiano de digrafos e produto funcional de digrafos, utilizamos Sabidussi (1960) e Vizing (1963) para o primeiro caso e Siqueira (2011) para os dois últimos. A seguir, apresentaremos o conceito de produto funcional de grafos, que pode ser estudado com maiores detalhes em Lozano *et. al.* (2013).

Os digrafos $\vec{G}_1(V_1, E_1)$ e $\vec{G}_2(V_2, E_2)$ são ditos funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E_1 \to F(V_2)$ e $f_2 : E_2 \to F(V_1)$, se $f_1$ e $f_2$ são tais que:

(i) Se $(u, v) \in E_1$ e $(v, u) \in E_1$ então $f_1((u, v)) = (f_1((v, u)))^{-1}$

(ii) Se $(x, y) \in E_2$ e $(y, x) \in E_2$ então $f_2((x, y)) = (f_2((y, x)))^{-1}$

(iii) Se $(u, v) \in E_1$ e $(x, y) \in E_2$ então $f_2((x, y))(u) \neq v$ ou $f_1((u, v))(x) \neq y$.

As aplicações $f_1$ e $f_2$ são denominadas aplicações de ligação, e $F(V)$ representa o conjunto de todas as bijeções existentes de $V$ em $V$.

Dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ são ditos funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E(D(G_1)) \to F(V_2)$ e $f_2 : E(D(G_2)) \to F(V_1)$ se os digrafos $D(G_1)$ e $D(G_2)$ são funcionalmente ligados pelas mesmas aplicações.

Sejam $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ grafos funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1 : E(D(G_1)) \to F(V_2)$ e $f_2 : E(D(G_2)) \to F(V_1)$. Define-se o produto de $G_1$ por $G_2$ segundo as aplicações $f_1$ e $f_2$, representado por $(f_1, G_1) \times (f_2, G_2)$, como sendo o grafo $G((f_1, D(G_1)) \times (f_2, D(G_2)))$.

Como exemplo, segue abaixo o produto funcional entre dois caminhos $P_3$, isto é, $(f_1, P_3) \times (f_2, P_3)$. É importante ressaltar que, a partir dos grafos originais, geram-se digrafos após a substituição de cada aresta $\{u, v\}$ pelos arcos $(u, v)$ e $(v, u)$. Em seguida, é feito o produto funcional entre estes digrafos, de acordo com Siqueira (2011). Por último, obtém-se o grafo final a partir da substituição dos arcos $(u, v)$ e $(v, u)$ pela aresta $\{u, v\}$. As Figuras 1, 2 e 3 ilustram esta sequência descrita acima:

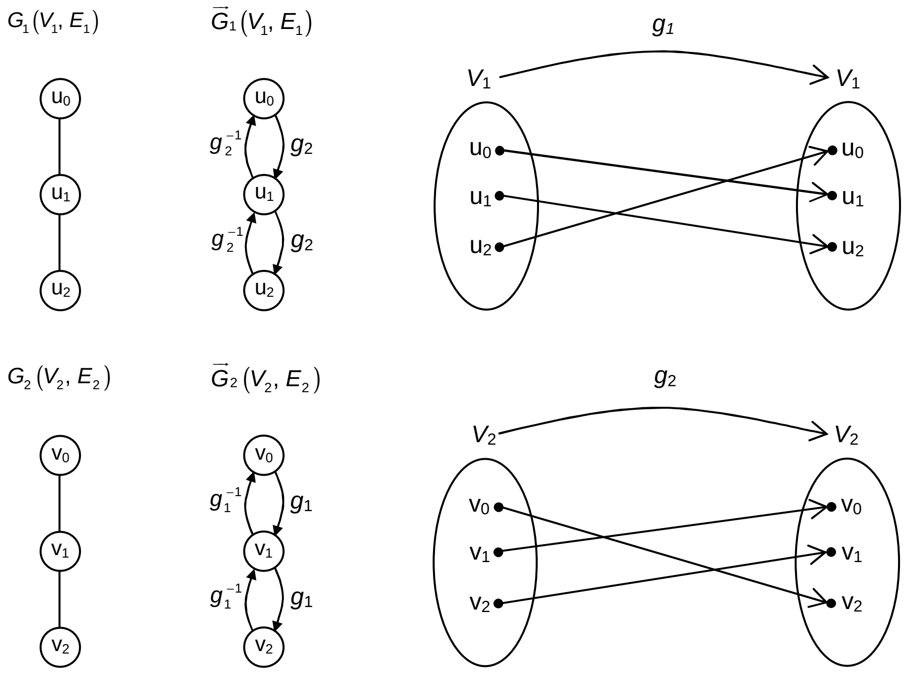



**Figura 1.** $G_1$, $G_2$, seus respectivos digrafos $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ e as funções $f_1$ e $f_2$.

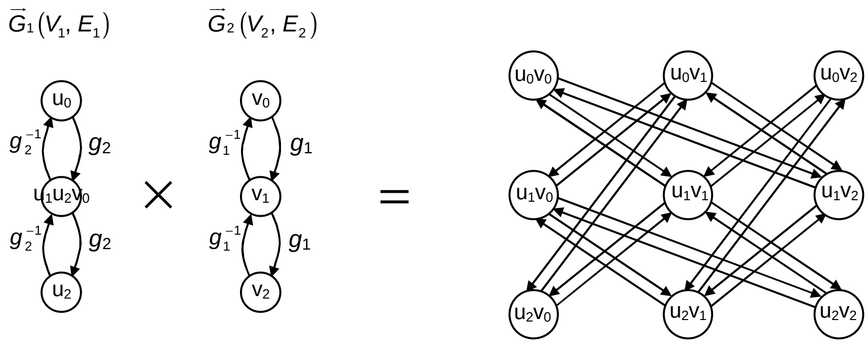



**Figura 2.** Produto funcional entre os digrafos $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, segundo $f_1$ e $f_2$.

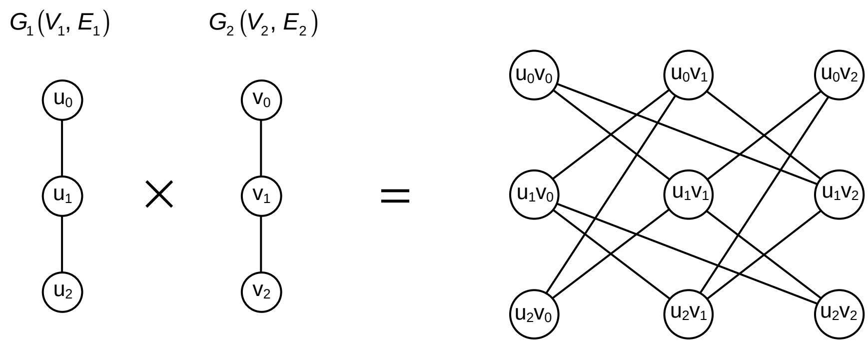



**Figura 3.** Produto funcional entre os grafos $G_1$ e $G_2$, segundo $f_1$ e $f_2$.

É importante registrar que em 2012 e 2013, Lozano *et. al.* provaram que a partir dos conceitos de produto funcional e grafos *k*-suporte, é sempre possível gerar subfamílias de grafos regulares que podem ser coloridas total e equilibradamente com, no máximo $\Delta + 2$ cores. Mostraremos adiante, como estas estruturas podem servir de suporte para ampliar sistemas computacionais, mantendo-se as propriedades iniciais.

## Redes de Interconexão

Uma rede de interconexão é uma estrutura composta por um conjunto $P$ de $n > 1$ processadores e um conjunto $T$ de ligações (conexões) entre os processadores e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Cada processador tem sua memória local;

(ii) Cada processador pode executar, em determinado momento, uma e somente uma das seguintes tarefas:

- a) processar alguma informação;
- b) enviar alguma informação;
- c) receber alguma informação.

(iii) Cada uma das tarefas gasta o mesmo tempo para sua realização.

Em uma rede de interconexão, cada processador deve pertencer a alguma ligação, podendo estar em várias. Denomina-se canal, uma conexão que possui somente dois processadores. Uma rede de interconexão pode ser representada por um grafo $G(V, E)$, neste caso, os vértices são os processadores e estão associados ao processamento de informações; as arestas são os canais e representam a transmissão de informações.

A Figura 4 apresenta uma coloração total equilibrada. A partir dessa coloração, pode-se associar que os processadores ou os canais coloridos com a mesma cor, por exemplo, com a cor 3, processam ou transmitem informações simultaneamente.

Observa-se que a ideia de associar coloração total equilibrada ao processamento e transmissão de dados pode ajudar na elaboração de algoritmos que independam da topologia da rede. Em uma coloração total não equilibrada, embora exista a possibilidade desse tipo de associação, a falta de equilíbrio na distribuição das cores não permite um bom aproveitamento da rede.

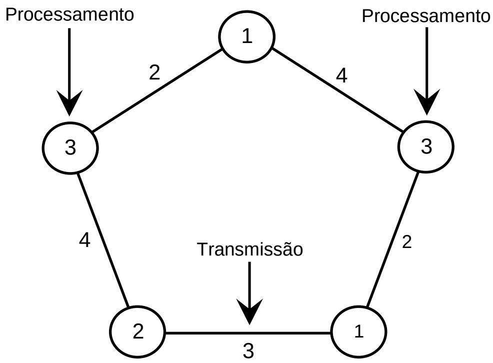



**Figura 4.** Processamento e transmissão de informações utilizando coloração.

Em 2008, Lozano *et. al.* desenvolveram um algoritmo que envolve unicamente transmissão de dados. Consideraram que a medida de tempo de um algoritmo era dada pelo número de passos que ele efetuava. Em uma rede, admite-se que toda computação possa ser realizada instantaneamente por qualquer processador e que a comunicação entre processadores vizinhos deve consumir um passo de computação. Este algoritmo de comunicação foi baseado na coloração total, e envolveu a troca completa de informações, ou seja, cada processador possuía uma informação e era necessário que todos os processadores conhecessem todas as informações. O algoritmo apresentado independe da topologia da rede de interconexão, mas funciona com qualquer coloração. Entretanto, uma coloração total equilibrada do grafo, que representa a rede, torna o processamento mais eficiente.

## Sistemas Multiagentes

De acordo com Russel e Norvig (1995), "um agente é tudo o que pode ser considerado capaz de perceber seu ambiente por meio de sensores e de agir sobre esse ambiente por intermédio de atuadores". Segundo Lesser (1999), "sistemas multiagentes são sistemas computacionais em que dois ou mais agentes interagem ou trabalham em conjunto para executar um conjunto de tarefas ou para satisfazer um conjunto de objetivos".

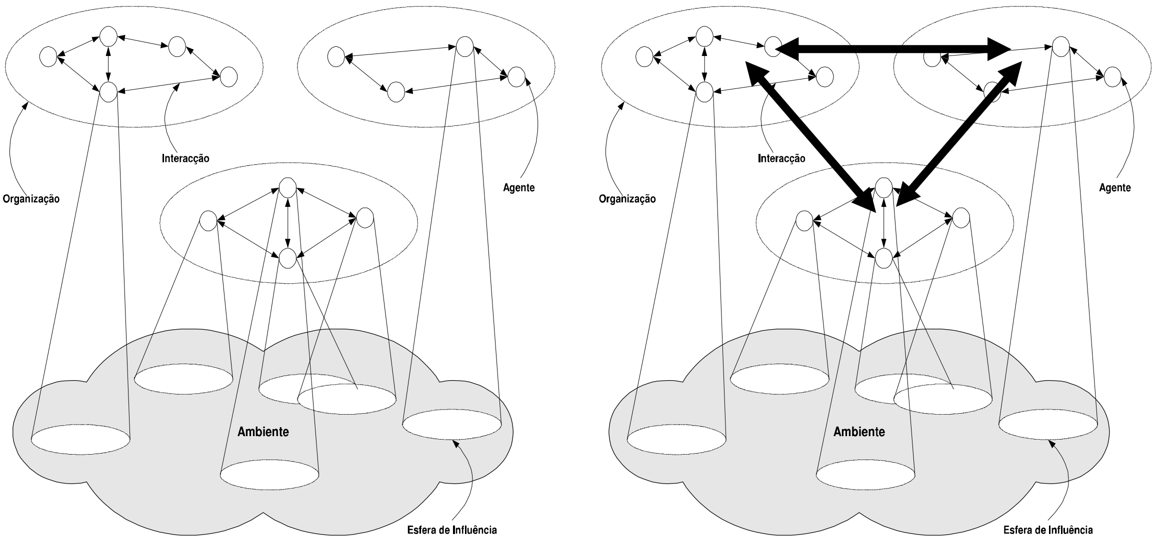
Diante da natureza distribuída dos sistemas multiagentes, Reis (2003) destaca, como ponto essencial na construção de sociedades de agentes, a capacidade de coordenar as interações e as dependências das atividades do diferentes agentes do SMA. O autor também aponta que "para que um agente possa operar como parte do sistema, é necessária a existência de uma infraestrutura que permita a comunicação e/ou interação entre os agentes que compõem o SMA", conforme ilustrado na Figura 5(A).

Os sistemas multiagentes, podem ter um comportamento dinâmico, com relação à quantidade de agentes, por exemplo, grandes empresas de vendas online, podem precisar de um

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0233

aumento na capacidade de processamento durante o lançamento de um produto, mas depois de certo tempo, podem não precisar mais de toda essa capacidade. Por este motivo, um modelo que permita criar topologias eficientes de forma dinâmica pode ajudar a gerenciar os sistemas.

Neste trabalho, apresentaremos um modelo que permite a conexão entre sistemas multiagentes, tomando como base a coloração total equilibrada, o produto funcional de grafos e um raciocínio similar ao utilizado nos modelos de redes de interconexão. A Figura 5(B) ilustra uma conexão entre multiagentes, que conforme dito antes, pode ser imprescindível em função da necessidade temporária de aumento da capacidade de processamento.




(A) (B)

**Figura 5.** Estrutura de um Sistema Multiagente (Adaptado de Reis, 2003)

Ressaltamos ainda, que para o processamento se tornar mais eficiente, sugere-se que cada sistema multiagente seja modelado por uma topologia que permita uma coloração total equilibrada, tal como descreve Lozano *et. al.* (2008).

## Conexão entre Sistemas Multiagentes

Como já foi dito antes, em muitas situações pode ser interessante ou até mesmo necessário expandir um sistema multiagente. Os motivos para se ampliar uma estrutura computacional vão desde a abertura de um novo setor de uma empresa à necessidade de compartilhar servidores interligados a internet para suprir a demanda de vendas em datas especiais, como no Natal, por exemplo.

Não temos a pretensão de esgotar o assunto com este exemplo, mas sim chamar a atenção, e lançar uma semente, para novas possibilidades de expansão de sistemas multiagentes com o auxílio do produto funcional de grafos.

A Figura 7 ilustra uma conexão entre dois sistemas multiagentes, obtida a partir de uma topologia não usual e um anel, ambas representadas na Figura 6. Antes de prosseguir, note que ambas as topologias admitem uma coloração total equilibrada com $\Delta + 2$ cores, no máximo.

É importante ressaltar que antes de gerar a conexão entre os sistemas multiagentes, é necessário recolorir essas estruturas. Tal técnica é descrita com detalhes em Siqueira (2011). A Figura 7 mostra o processo inicial da construção deste sistema compartilhado, mantendo-se a coloração total equilibrada com $\Delta + 2$ cores, no máximo. Chamamos a atenção para o vértice $v_1u_0$ e seus vizinhos que, para este caso, precisaremos apenas de 7 cores para a coloração total.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0233  

Este processo se repetirá com os demais vértices e arestas deste grafo, garantindo assim uma coloração equilibrada com as mesmas 7 cores.

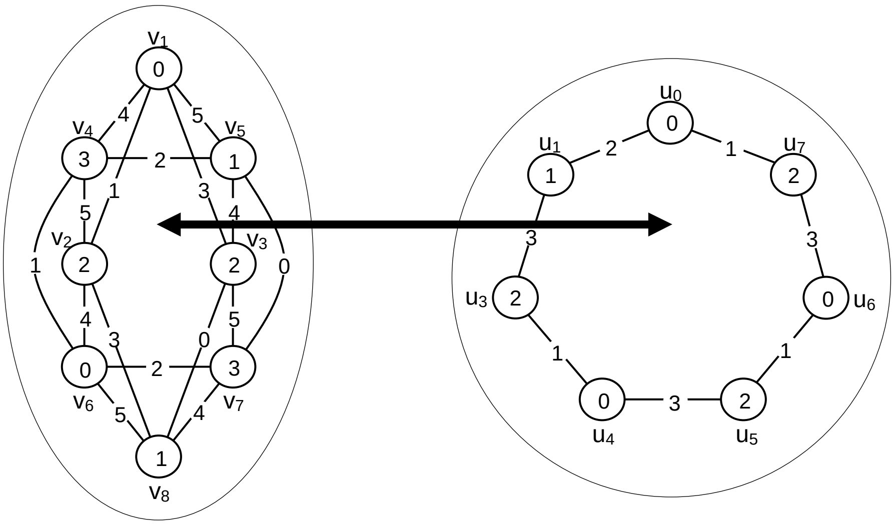



**Figura 6.** Dois sistemas multiagentes e suas colorações equilibradas.

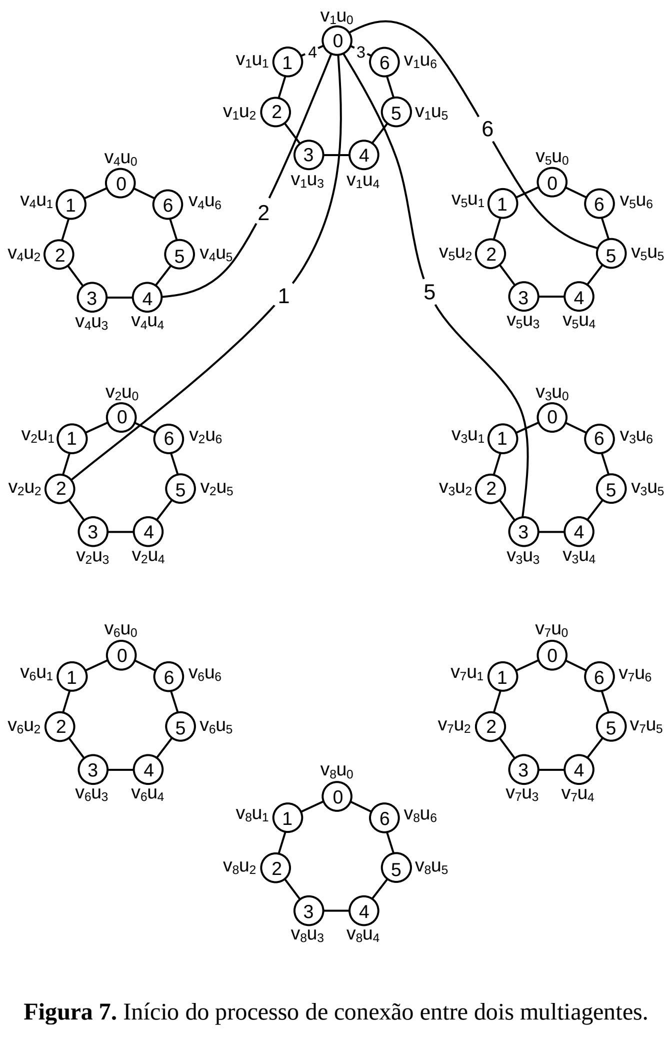


**Figura 7.** Início do processo de conexão entre dois multiagentes.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0233  

## Conclusões

Os resultados apresentados neste texto mostram que o produto funcional permite construir grafos que podem ser coloridos total e equilibradamente com, no máximo, $\Delta + 2$ cores e que podem servir como suporte para gerar novas topologias em sistemas multiagentes, bastando para isso optar pela técnica adequada. Ressaltamos ainda, que o fato de poder expandir dinamicamente as topologias, mantendo propriedades como conexidade e regularidade, entre outras, faz do produto funcional uma ferramenta que pode ser amplamente utilizada na computação em nuvem.

## Referências Bibliográficas

BOAVENTURA NETTO, P. O. Grafos: Teorias, Modelos Algoritmos. Rio de Janeiro, Edgard Blücher, 2003.

BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. Graph Theory with Applications. New York, North-Holland, 1976.

DIESTEL, R. Graph theory. New York, Springer-Verlag, 1997.

FRIEDMANN, C. V. P., MARKENZON, L., LOZANO, A. R. G., WAGA, C. Total Coloring of Block-Cactus Graph. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **78**, 273-283, 2011.

LESSER, V. Cooperative Multi-Agent Systems: A Personal View of the State of the Art, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* **11**, 133-142, 1999.

LOZANO, A. R. G. Coloração total equilibrada de grafos. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., JURKIEWICZ, S. Coloração Total Equilibrada – Um Modelo para Redes de Interconexão, *Pesquisa Operacional* **28**, 161-171, 2008.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., WAGA, C., MARKENZON, L. Coloração de Vértices com Folga. In: XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Porto Seguro. Anais do XLI SBPO, 3084-3091, 2009.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., SIQUEIRA, A. S. Relação entre coloração de vértices com folga e coloração total equilibrada, *Almanaque Unigranrio de Pesquisa* **1**, 103-106, 2011.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., FRIEDMANN, C. V. P. e JURKIEWICZ, S. Grafo k-suporte, produto funcional e coloração total equilibrada em grafos regulares. In: XLIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro. Anais do XLIV SBPO, 4046-4057, 2012.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., JURKIEWICZ, S. e FRIEDMANN, C. V. P. Produto funcional de grafos, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional* **14**, 221-232, 2013.

REIS, L. P. Coordination in Multi-Agent Systems: Applications in University Management and Robotic Soccer. PhD Thesis, FEUP, Porto, 2003.

RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. Artificial intelligence. A modern approach. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.

SABIDUSSI, G. Graph multiplication, *Math. Z.* **72**, 446-457, 1960.

SIQUEIRA, A. S. Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

VIZING, V. G. The Cartesian product of graphs, *Vyc. Sis*. **9**, 30-43, 1963.

YAP, H. P. Some topics in graph theory. London, Cambridge University Press, 1986.

YAP, H. P. Total colorings of graphs. Berlin, Springer, 1996.