

Simulação Adaptativa Multi-Escalas de Escoamentos Transientes Baseada em Métrica Riemanniana

Renato V. Linn¹, Samir Maghous²

Departamento de Engenharia Civil, DECIV/UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Este trabalho apresenta a simulação adaptativa de escoamentos transientes empregando-se uma técnica multi-escalas para controlar o erro numérico da solução de forma contínua. A avaliação do erro é realizada de forma tensorial através de uma formulação baseada em métrica Riemanniana onde as diferentes escalas do escoamento são capturadas através de considerações sobre a avaliação da norma do erro. O tamanho da malha bem como sua orientação são controladas pelos auto-valores e auto-vetores da métrica. Operações de refinamento, desrefinamento e suavização da malha são empregados para distribuir uniformemente o erro de interpolação ao longo do avanço da simulação. Exemplos de simulações adaptativas de escoamentos compressíveis transientes são apresentadas para demonstrar a aplicabilidade do método, incluindo o escoamento transônico no entorno da geometria de um aerofólio e de um avião.

Palavras-chave. Adaptação de Malhas, Métrica Riemanniana, Simulação Adaptativa, Dinâmica de Fluidos Computacional

1 Introdução

A adaptação de malhas visa remodelar automaticamente a discretização espacial do problema, de forma a reduzir o esforço computacional e maximizar a precisão da solução obtida. É um tema de grande importância pois permite reduzir a magnitude do custo computacional de uma simulação em uma ou várias ordens de grandeza. Inúmeros problemas numéricos a serem solucionados computacionalmente e com precisão surgem das mais diversas aplicações. A adaptação de malhas pode ser encontrada em problemas de mecânica de fluidos [3], mecânica dos sólidos [10], cosmologia [5], dentre tantas outras áreas.

A adaptação de malhas aplicada a problemas com efeitos multi-escalas transientes, como escoamentos turbulentos ou compressíveis, possui algumas particularidades. A primeira é a presença de uma ampla variação de escalas presentes no escoamento. Para detectar todas as escalas do escoamento, pode-se empregar um escalonamento do erro [1]. Outra metodologia mais robusta consiste em avaliar o erro na norma L^p [3] através de uma métrica Riemanniana, permitindo que todas as escalas sejam capturadas. Outra dificuldade reside no campo de solução cujo erro será avaliado. Para problemas estacionários, usualmente emprega-se uma variável escalar, como número de Mach local [4], mas esta escolha não é adequada para problemas multi-escalas transientes. Pode-se, porém, aplicar interseções de métricas para cobrir o erro de interpolação de diversos campos de solução simultaneamente [1, 3].

Neste trabalho, um esquema de adaptação anisotrópica de malhas não-estruturadas é empregado freqüentemente ao longo da simulação incluindo etapas de refinamento, desrefinamento, alternância de arestas e faces e suavização nodal para controlar o erro da solução numérica do

¹renatolinn@ufrgs.br

²samir.maghous@ufrgs.br

escoamento e o tamanho da malha. Efeitos multi-escalas no erro da solução são considerados via avaliação do erro na norma \mathbf{L}^p conjuntamente de interseções de métricas de todos os campos de solução das variáveis de conservação do escoamento. O Método dos Elementos Finitos é empregado para solucionar numericamente escoamentos compressíveis. É demonstrada a aplicação do esquema para simular o martelamento transônico no entorno de um aerofólio NACA-0012 e no entorno do avião civil CRM-NASA, determinando-se também propriedades aerodinâmicas de interesse, como coeficiente de sustentação.

2 Métrica Riemanniana

Um espaço métrico Euclidiano $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M})$ é um espaço vetorial finito onde o produto escalar é definido através de uma matriz \mathcal{M} simétrica positiva-definida chamada de tensor métrico ou métrica de formato $d \times d$, a qual define um produto escalar:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{M}} = \mathbf{u}^T \mathcal{M} \mathbf{v} \quad \text{para } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \quad (1)$$

Em um espaço métrico Riemanniano, a métrica varia continuamente em todo o domínio Ω . Denota-se este espaço por $\mathbf{M} = (\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$. Portanto, o cálculo de quantidades geométricas no espaço Riemanniano requer um procedimento de integração para levar em consideração a variação da métrica. O comprimento de uma aresta \mathbf{ab} , $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab})$, é calculado através de integração utilizando-se uma parametrização do tipo $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{ab}$ onde $t \in [0, 1]$, e vem dada por:

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{M}} dt = \int_0^1 \sqrt{\mathbf{ab}^T \mathcal{M}(\mathbf{a} + t\mathbf{ab}) \mathbf{ab}} dt \quad (2)$$

enquanto o volume ou área orientada $|K|_{\mathcal{M}}$ de um dado elemento K vem dado por:

$$|K|_{\mathcal{M}} = \int_K \sqrt{\det \mathcal{M}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (3)$$

A idéia central de uma adaptação de malhas guiada pela utilização de métricas é de construir uma malha na qual as arestas possuam comprimento tão mais próximo de um valor prescrito quanto possível no espaço métrico Riemanniano. Quanto mais próximo deste valor, mais bem distribuído se encontrará o erro ao longo da malha. A qualidade de um elemento K pode ser monitorada através de uma função de qualidade $Q_{\mathcal{M}}$, a qual combina informações tanto de comprimento quanto de orientação [2]:

$$Q_{\mathcal{M}}(K) = \frac{\sum \ell_{\mathcal{M}}^2(A_K)}{|K|_{\mathcal{M}}^{2/d}} \quad (4)$$

Na Eq. (4), o numerador leva em consideração o comprimento. Diminuindo-se o comprimento das arestas calculadas no espaço Riemanniano tem-se a diminuição do valor de $Q_{\mathcal{M}}$. O denominador é uma medida da orientação do elemento no espaço Riemanniano, onde um elemento orientado mais próximo dos auto-vetores da métrica da solução local produz uma redução de $Q_{\mathcal{M}}$. Portanto, minimizando-se $Q_{\mathcal{M}}$ a qualidade do elemento torna-se maximizada em um contexto anisotrópico.

Do ponto de vista discreto, a métrica deve ser interpolada para que se possa calcular o comprimento das arestas e o volume ou área orientada no espaço métrico Riemanniano. Considerando-se uma interpolação linear do tensor métrico, a integração definida na Eq. (2) pode ser aproximada por [4]:

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) \approx \frac{2}{3} \frac{\ell_0^2 + \ell_0 \ell_1 + \ell_1^2}{\ell_0 + \ell_1} \quad (5)$$

onde $\ell_i(\mathbf{ab}) = \sqrt{\mathbf{ab}^T \mathcal{M}(\mathbf{x}_i) \mathbf{ab}}$ é o comprimento da aresta calculado na métrica $\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)$ com $i = 0, 1$ para uma aresta com extremidades \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente. De forma similar, a integral da Eq. (3) pode ser aproximada numericamente através de [4]:

$$|K|_{\mathcal{M}} \approx \sqrt{\det \left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathcal{M}_i(\mathbf{x}) \right)} |K| \tag{6}$$

onde $\mathcal{M}_i(\mathbf{x})$ representa a métrica em cada um dos i vértices do elemento K com área ou volume orientado $|K|$ no espaço Euclidiano ($k = 2$ para um triângulo e $k = 3$ para um tetraedro).

A partir das propriedades que a matriz \mathcal{M} apresenta (simétrica, positiva-definida), pode-se reescrever \mathcal{M} através de uma decomposição espectral:

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \mathbf{\Lambda} \mathcal{R}^T \tag{7}$$

onde \mathcal{R} é uma matriz ortonormal a qual satisfaz $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathbf{I}_d$. A matriz \mathcal{R} é composta pelos auto-vetores associados à \mathcal{M} e $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal composta pelos auto-valores associados à \mathcal{M} . Por ser positiva-definida, os auto-valores $(\lambda_i)_{i=1,d}$ são estritamente positivos.

3 Avaliação do Erro

O erro $E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab})$ estimado para uma aresta \mathbf{ab} da malha é definido como o limite superior da diferença entre o valor de uma aproximação quadrática e o valor da função propriamente calculado através de uma interpolação linear medida em uma norma \mathbf{L}^p para uma dada função contínua u , o qual pode ser expresso através de:

$$E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab}) \equiv \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) \tag{8}$$

com a métrica $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ definida como o Hessiano normalizado da função u calculado na norma \mathbf{L}^p [8]:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{x}) = (\det |\mathbf{H}|)^{-\frac{1}{2p+d}} |\mathbf{H}| \tag{9}$$

onde \mathbf{H} é uma matriz simétrica representando o Hessiano de u . Para garantir que \mathbf{H} seja uma matriz positiva-definida, o termo $|\mathbf{H}|$ é obtido como a matriz Hessiana com seus auto-valores normalizados e limitados, tal que $|\mathbf{H}| = \mathcal{R} |\tilde{\mathbf{\Lambda}}| \mathcal{R}^T$, de forma que seus respectivos auto-valores limitados $\tilde{\lambda}_i$ que compõe $|\tilde{\mathbf{\Lambda}}| = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i)$ sejam [3]:

$$\tilde{\lambda}_i = \min \left(\max \left(|\lambda_i|, \frac{1}{h_{\max}^2} \right), \frac{1}{h_{\min}^2} \right) \tag{10}$$

sendo h_{\max} e h_{\min} o comprimento máximo e mínimo permitido para uma aresta pertencente à malha e a matriz Hessiana calculada empregando-se uma formulação variacional de dupla projeção.

Na Eq. (9), o último termo $|\mathbf{H}|$ especifica a orientação e anisotropia local do erro através de uma matriz Hessiana normalizada da função u . Este é um resultado consistente com a teoria de limites de erro de interpolação para funções polinomiais de Lagrange, a qual diz que um polinômio interpolador para uma dada função gera um erro máximo de interpolação de magnitude proporcional a uma derivada de ordem imediatamente acima à do polinômio. Assim, com a utilização de uma função linear de interpolação de uma solução tem-se um erro de interpolação de ordem quadrática, ou, em um espaço tridimensional, proporcional ao Hessiano da função a ser interpolada. Além disto, a limitação imposta sobre os auto-valores através da Eq. (10) limita diretamente o tamanho

das arestas para controlar o erro, sendo esta propriedade fundamental para evitar refinamentos excessivos na simulação de escoamentos transientes.

O primeiro termo escalar $(\det |\mathbf{H}|)^{-\frac{1}{2p+d}}$ que aparece na Eq. (9) é resultado da medida a ser realizada na norma \mathbf{L}^p , consistindo em uma medida de Lebesgue em um espaço de Sobolev. Desta forma, a medida do erro considera as derivadas das funções e não apenas a diferença entre valores de funções. Disto resulta que este termo modifica a estimativa do erro para levar em consideração a sensibilidade à norma \mathbf{L}^p . Se $p = \infty$, então $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{\mathbf{L}^\infty}(\mathbf{x}) = |\mathbf{H}|$ e nenhuma sensibilidade à norma \mathbf{L}^p é levada em consideração.

Estratégias de adaptação de malha baseadas no controle do erro de interpolação na norma \mathbf{L}^∞ falham em capturar pequenas variações presentes no campo de solução que diferem das demais por muitas ordens de grandeza. A anisotropia seria também perdida nas regiões próximas a discontinuidades. Portanto, controlar o erro na norma \mathbf{L}^p permite capturar todas as escalas do campo de solução, sendo, por isto, também chamado de uma abordagem multi-escalas. Para os problemas envolvendo escoamentos com efeitos em diferentes escalas, o emprego da norma \mathbf{L}^p permite capturar pequenas nuances tais como zonas de pequena recirculação e camada limite mesmo na presença de efeitos mais fortes como ondas de choque. Tal procedimento estima o erro de apenas uma variável u escolhida. A extensão a um número qualquer de variáveis pode ser realizada através da interseção de métricas de diferentes campos escalares.

Quando mais de uma métrica é especificada em um dado ponto, o procedimento de adaptação precisa cobrir o erro de interpolação de todos estes campos ao mesmo tempo. Para isto, uma técnica de redução simultânea é empregada. Nesta abordagem, busca-se uma base comum \mathcal{P} de duas métricas \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B , tal que elas sejam congruentes a uma matriz diagonal em suas bases. A matriz $\mathcal{B} = \mathcal{M}_A^{-1}\mathcal{M}_B$ é introduzida, tal que \mathcal{B} é diagonalizável com auto-valores reais. Os auto-vetores normalizados de \mathcal{B} são \mathbf{e}_i com $i = 1, d$ e compõem a base comum diagonalizável \mathcal{P} . As componentes principais de \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B projetadas nesta base podem ser obtidas com:

$$\mu_i = \mathbf{e}_i^T \mathcal{M}_A \mathbf{e}_i \quad \text{e} \quad \beta_i = \mathbf{e}_i^T \mathcal{M}_B \mathbf{e}_i \quad (11)$$

Como \mathcal{P} é também inversível, a interseção da métrica pode ser calculada através de:

$$\mathcal{M}_{A \cap B} = \mathcal{M}_A \cap \mathcal{M}_B = (\mathcal{P}^{-1})^T \text{diag}(\max(\mu_i, \beta_i)) \mathcal{P}^{-1} \quad (12)$$

Para uma terceira métrica \mathcal{M}_C a ser interpolada, o procedimento é realizado da mesma forma, com $\mathcal{M}_{AB \cap C}$ utilizando $\mathcal{M}_{AB} = \mathcal{M}_{A \cap B}$ e assim por diante para mais interseções de métricas. É importante observar que quanto maior o número de interseções empregadas, menor será a anisotropia final da malha [1].

4 Simulação Adaptativa de Escoamentos Transientes

O algoritmo geral de adaptação de malhas implementado neste trabalho realiza a seguinte seqüência de modificações locais na malha, a qual define uma iteração de adaptação:

1. Realizar suavização nodal;
2. Refinar todas as arestas cujo erro esteja acima de um dado limiar superior η_U ;
3. Alternar faces/arestas até a convergência;
4. Realizar suavização nodal;
5. Desrefinar todas as arestas cujo erro esteja abaixo de um dado limiar inferior η_L ;

6. Alternar faces/arestas até a convergência;
7. Realizar suavização nodal.

A convergência da etapa de alternância de faces ou arestas é obtida quando mais nenhuma alternância produz resultados benéficos para a qualidade da malha. Uma aresta \mathbf{ab} é refinada se $E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab}) \geq \eta_U \varepsilon_{\mathbf{L}^p}$ e é desrefinada se $E_{\mathbf{L}^p}(\mathbf{ab}) \leq \eta_L \varepsilon_{\mathbf{L}^p}$, onde $\varepsilon_{\mathbf{L}^p}$ é o erro de interpolação objetivo medido na norma \mathbf{L}^p . O valor dos limiares superiores e inferiores de erro, η_U e η_L , são tomados como 1, 4 e 0, 6, respectivamente [4]. O desrefinamento é realizado colapsando-se os dois vértices de uma aresta para um ponto intermediário o qual minimiza o somatório da Eq. (4) para os elementos vizinhos à aresta desrefinada, sem violar a topologia da malha. De forma similar, a suavização nodal também é realizada no sentido de minimizar a Eq. (4).

O algoritmo de adaptação é acoplado a um algoritmo de simulação de escoamentos compressíveis utilizando-se o Método dos Elementos Finitos para solução das Equações de Navier-Stokes [7]. As variáveis de conservação em tais escoamentos que devem ser controladas são ρ (massa específica), u_i (componentes de velocidades) e E (energia total). Portanto, o campo escalar cujo erro deve ser controlado é o campo obtido pela intersecção das métricas dos campos de variáveis de conservação do escoamento, isto é: $\mathbf{M}(\rho) \cap \mathbf{M}(u_i) \cap \mathbf{M}(E)$, o qual é calculado utilizando-se a Eq. (11) conjuntamente da Eq. (12). Neste trabalho, a malha é adaptada a cada $\Delta\alpha = 20$ passos executados do algoritmo de escoamento e o erro avaliado na norma \mathbf{L}^2 . Os detalhes relacionados à solução do escoamento e modificação local da malha podem ser encontrados em [7].

5 Aplicação 1: Escoamento Transônico Laminar em Aerofólio

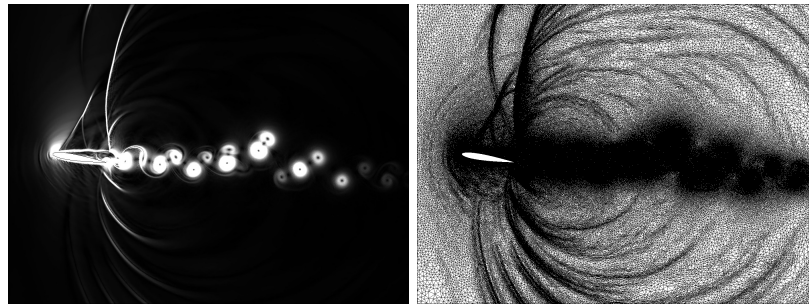
A simulação numérica bidimensional do escoamento transônico no entorno do aerofólio NACA-0012 é realizada aqui para um ângulo de ataque alto $\alpha = 9^\circ$ e um número de Mach de corrente-livre $M_\infty = 0,80$. O número de Reynolds de corrente-livre considerado é $Re_\infty = 1 \times 10^4$. Nestas condições, tem-se uma camada limite laminar com formação de fortes interações entre a camada limite e ondas de choque. Um comprimento de corda c unitário é considerado em um domínio circular com valor de raio $25c$. A densidade e velocidade de corrente-livre são tomadas como $\rho_\infty = 1$ e $u_\infty = 1$, respectivamente. A simulação adaptativa é realizada considerando-se $\varepsilon_{\mathbf{L}^2} = 0,02c$ e $h_{min} = 0,005c$ até o tempo adimensional final de valor 50.

A Fig. 1 ilustra o escoamento desenvolvido e a respectiva malha adaptada. É possível visualizar as ondas de choque geradas pela separação da camada limite tanto na porção superior quanto inferior do aerofólio e a subsequente esteira de vón Kármán. Fortes ondas de choque instáveis também se formam e pequenas interações do tipo *lambda* surgem na porção superior. Visualiza-se também a malha adaptada conseguindo capturar adequadamente efeitos de diferentes escalas no escoamento.

Este martelamento devido à variação das ondas de choque pode ser também visualizado na evolução temporal dos coeficientes aerodinâmicos de sustentação apresentado na Fig. 2. O valor médio de coeficiente de sustentação obtido nesta simulação é 0,41, o qual oscila entre os valores de 0,36 e 0,48. A mesma simulação bidimensional foi realizada por [9] onde valores de coeficiente de sustentação oscilando entre 0,22 e 0,38 foram obtidos. Os resultados experimentais se apresentam, em geral, também dispersos para esta faixa de altos ângulo de ataque e número de Mach [6].

6 Aplicação 2: Escoamento Turbulento Transônico em Avião

Neste exemplo, emprega-se o algoritmo desenvolvido para simular o escoamento turbulento transônico no entorno do avião *Common Research Model* (CRM-NASA) desenvolvido pela NASA



(a) Magnitude do gradiente de massa específica (b) Malha adaptada

Figura 1: Aplicação 1: escoamento e respectiva malha adaptada. Fonte: dos autores.

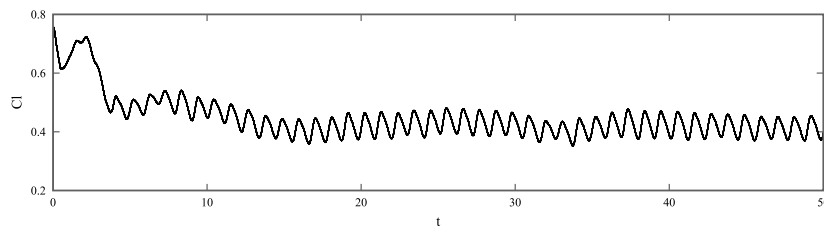
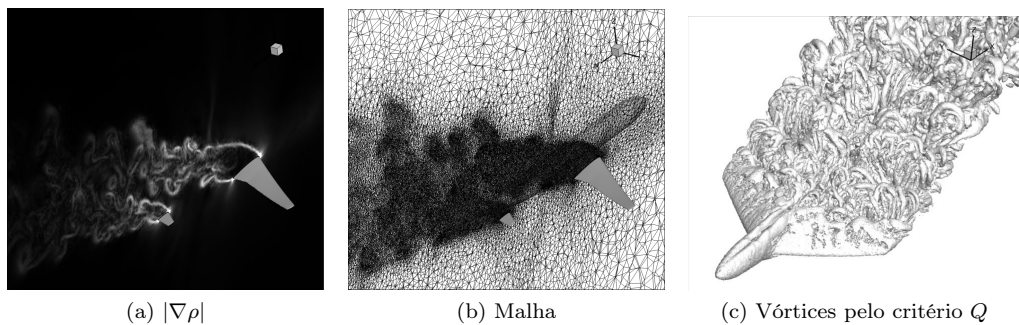


Figura 2: Aplicação 1: coeficiente de sustentação transiente. Fonte: dos autores.

em parceria com a empresa de aviação Boeing, que consiste de uma asa supercrítica com design contemporâneo e uma fuselagem que é representativa de um avião comercial [11].

A simulação numérica do escoamento transônico no entorno do avião é realizada para um grande ângulo de ataque $\alpha = 30^\circ$ e um número de Mach de corrente-livre $M_\infty = 0,85$. O número de Reynolds de corrente-livre considerado é $Re_\infty = 5 \times 10^6$. A densidade e velocidade de corrente-livre são tomadas como $\rho_\infty = 1$ e $u_\infty = 1$, respectivamente. A simulação é realizada controlando-se o erro com $\varepsilon_{L^2} = 0,001E$ e $h_{min} = 0,01E$, onde E é o valor da envergadura das asas. A massa específica e a velocidade de corrente-livre de referência consideradas são, respectivamente, $\rho_\infty = 1$ e $u_\infty = 1$. A simulação é realizada até o tempo adimensional final de valor 10.

Nestas condições, tem-se uma grande separação do escoamento, conforme é possível observar na Fig. 3, onde apresenta-se a magnitude do gradiente de massa específica e a malha adaptada, bem como a estrutura do escoamento.



(a) $|\nabla\rho|$ (b) Malha (c) Vórtices pelo critério Q

Figura 3: Aplicação 2: escoamento, malha e desprendimento de vórtices. Fonte: dos autores.

7 Considerações Finais

Uma técnica multi-escalas para controlar o erro adaptando malhas continuamente ao longo da simulação de escoamentos foi apresentada. A técnica avalia o erro com uma estrutura matemática de métrica Riemanniana, possibilitando a análise tensorial do erro com controle da direção (auto-vetores), tamanho (auto-valores) e diferentes escalas (norma do erro) do escoamento. Conjuntamente de manipulações geométricas da malha como refinamento, desrefinamento e realocação nodal, esta técnica se mostra capaz de adaptar malhas amplificando a precisão da solução ao menor custo computacional. Exemplos de aplicações foram apresentados através das simulações do escoamento transiente no entorno de um aerofólio e de geometria realista complexa de avião. Em ambos os casos, efeitos de diferentes escalas no escoamento como recirculações, turbulência, esteiras e ondas de choque foram satisfatoriamente capturadas pela técnica adaptativa.

Referências

- [1] M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi e O. Pironneau. “Anisotropic Unstructured Mesh Adaption for Flow Simulations”. Em: **International Journal for Numerical Methods in Fluids** Vol. 25.4 (1997), pp. 475–49.
- [2] A. Claisse, V. Ducrot e P. Frey. “Levelsets and anisotropic mesh adaptation”. Em: **Discrete and Continuous Dynamical Systems** Vol. 23.1–2 (2009), pp. 165–183.
- [3] P. J. Frey e F. Alauzet. “Anisotropic mesh adaptation for CFD computations”. Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** Vol. 194.48–49 (2005), pp. 5068–5082.
- [4] W. G. Habashi, J. Dompierre, Y. Bourgault, D. Ait-Ali-Yahia, M. Fortin e M. G. Vallet. “Anisotropic Mesh Adaptation: Towards User-Independent, Mesh-Independent and Solver Independent CFD. Part I: General Principles”. Em: **International Journal for Numerical Methods in Fluids** Vol. 32.6 (2000), pp. 725–744.
- [5] R. I. Klein. “Star Formation with 3-D Adaptive Mesh Refinement: The Collapse and Fragmentation of Molecular Clouds”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** Vol. 109.1–2 (1999), pp. 123–152.
- [6] B. H. K. Lee. “Transonic buffet on a supercritical aerofoil”. Em: **The Aeronautical Journal** Vol. 94.935 (1990), pp. 143–152.
- [7] R. V. Linn e A. M. Awruch. “Adaptative finite element simulation of unsteady turbulent compressible flows on unstructured meshes”. Em: **Computers & Fluids** 254 (2023), p. 105816.
- [8] A. Loseille e F. Alauzet. “Continuous Mesh Framework - Part I: Well-Posed Continuous Interpolation Error”. Em: **SIAM Journal on Numerical Analysis** Vol. 49.1 (2011), pp. 38–60.
- [9] R. F. B. Miserda, J. R. Jalowitzki, R. L. Queiroz e A. F. Mendonça. “Numerical simulation of the laminar transonic buffet in airfoils”. Em: **Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering – ENCIT 2004**. No. 10. Rio de Janeiro, Brasil, 2004, pp. 1–11.
- [10] E. Stein e W. Rust. “Mesh Adaptations for Linear 2d Finite-Element Discretizations in Structural Mechanics, Especially in Thin Shell Analysis”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** Vol. 36.1 (1991), pp. 107–129.
- [11] J. C. Vassberg, M. A. DeHaan, S. M. Rivers e R. A. Wahls. **Development of a Common Research Model for Applied CFD Validation Studies**. Paper-6919. AIAA, 2008.