

# Dinâmica de Casais: Condições para um Relacionamento Estável Satisfatório

Alan S. Gois<sup>1</sup>

DAA/IFG, Luziânia, GO e MAT/UnB, Brasília, DF

Yuri D. Sobral<sup>2</sup> Andrea G. Oliveira<sup>3</sup>

MAT/UnB, Brasília, DF

Jorge C. Lucero<sup>4</sup>

CIC/UnB, Brasília, DF

**Resumo.** O primeiro modelo matemático que descreve a dinâmica de relações amorosas foi proposto por [9] e tinha como base um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares autônomas. De fato, considerando-se um casal típico (Eduardo e Mônica, por exemplo), podemos definir  $x_e(t)$  como o sentimento de Eduardo por Mônica no instante  $t$  e  $x_m(t)$  o sentimento de Mônica por Eduardo em  $t$ . Se  $x_e > 0$ , Eduardo está apaixonado por Mônica. Se  $x_e < 0$ , Eduardo rejeita Mônica e se  $x_e = 0$ , Eduardo é indiferente a Mônica. Definições similares se aplicam para  $x_m(t)$ . O sistema proposto é linear, composto de seis parâmetros que representam reações aos sentimentos próprios, ao amor do parceiro e à atratividade do parceiro. Neste trabalho, classificamos os perfis de casais em função de seus parâmetros e mostramos quais são as condições necessárias para que uma relação seja bem-sucedida, bem como os tipos de casais que satisfazem tais condições. Em particular, discutimos o papel da atratividade na dinâmica da relação.

**Palavras-chave.** Modelagem Matemática, Matemática do Amor, Pontos de Equilíbrio.

## 1 Introdução

Os estudos sobre dinâmica de casais podem ser vistos em vários campos da ciência, como, por exemplo, psicologia, antropologia, sexologia, sociologia entre outros. Na teoria da atratividade, o amor é entendido como a interação de algumas dimensões comportamentais básicas, como atratividade, cuidado e sexo [1], ou como intimidade, paixão e comprometimento [8]. Por acreditarem que influencia a dimensão sexual, a atratividade obteve mais atenção nos estudos [2].

Na Matemática, estes estudos buscam propor modelos que permitam derivar formalmente, de acordo com os princípios básicos da psicologia do amor, como se espera que os casais evoluam ao longo do tempo [7]. Diversos trabalhos que abordam o tema, como [4] e [5], formulam problemas de controle ótimo, por exemplo. Em [7], são feitas análises de histórias de amor descritas em poemas e filmes clássicos. Com o intuito de trazer o tema à nossa realidade, usaremos os personagens Eduardo e Mônica, denotando por  $x_e$  e  $x_m$  os sentimentos de Eduardo e Mônica, respectivamente.

Assim como feito na literatura de relacionamentos interpessoais, neste trabalho, assumiremos que o sentimento de uma pessoa por outra pode ser quantificado, como proposto por [6], e uma história de amor será representada pela evolução dos sentimentos dos dois indivíduos ao longo do tempo, como mostrado na Figura 1.

<sup>1</sup>alangois.unb@gmail.com

<sup>2</sup>ydsobral@unb.br

<sup>3</sup>andreagenovese@unb.br

<sup>4</sup>lucero@unb.br

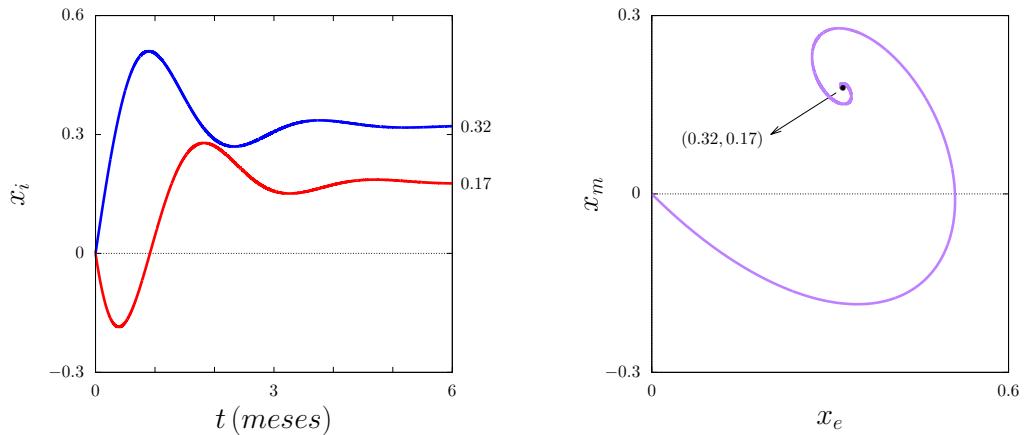


Figura 1: Representação da evolução dos sentimentos de um casal ao longo do tempo (esquerda) e diagrama de fase (direita). A curva vermelha representa os sentimentos de Mônica e a azul representa Eduardo. Fonte: os autores.

O modelo geral que representa a relação entre duas pessoas pode ser decomposta em três termos:

$$\dot{x}_i = R_i^P(x_i) + R_i^L(x_i, x_j) + R_i^A(A_j, x_i), \quad (1)$$

em que  $i, j = e, m$  representam os membros do casal,  $x_i$  representa os sentimentos do indivíduo  $i$  para com  $j$  e cada um destes termos representa um tipo de reação amorosa. Já o termo  $A_j$  é a atratividade do indivíduo  $j$  percebida pelo parceiro  $i$  e é composta por várias componentes, cada uma com um peso, atribuídos pelo indivíduo  $i$ . É importante ressaltar que a atratividade de um indivíduo não é uma característica absoluta dele, mas um valor percebido por seu parceiro.

Neste trabalho, vamos considerar um modelo linear. Dessa forma, temos a reação ao próprio sentimento, em outras palavras, o mecanismo de defesa de cada pessoa, representado pelo termo  $R_i^P(x_i)$  e obtido como o produto entre o sentimento  $x_i$  do indivíduo  $i$ , e uma constante  $\tau_i$ . Assim, temos que  $R_i^P(x_i) = \tau_i x_i$ . O segundo termo é a reação ao amor, representada pela percepção do sentimento recebido do parceiro e gerada pelo produto do sentimento  $x_j$ , do indivíduo  $j$ , por uma constante  $\omega_i$ , do indivíduo  $i$ , ou seja,  $R_i^L(x_i, x_j) = \omega_i x_j$ . Por último, a reação à atratividade  $R_i^A$  é estabelecida pela atratividade  $A_j$ , assumida constante, multiplicada por um fator  $\sigma_i$  de reatividade à atração, isto é,  $R_i^A(A_j, x_i) = \sigma_i A_j$ . Com isso, o Modelo (1) tem a forma

$$\dot{x}_i = \tau_i x_i + \omega_i x_j + \sigma_i A_j, \quad i, j = e, m, \quad (2)$$

em que  $\tau_i$  é chamado coeficiente de esquecimento [7], ou de apego. Sendo assim, o Modelo Linear (2) expressa a equação geral com os três princípios fundamentais que governam a dinâmica do amor de um casal, em particular, de Eduardo e Mônica.

## 2 Personalidades dos Indivíduos

Assim como proposto em [10], escolhendo os sinais dos coeficientes  $\tau_i$  e  $\omega_i$  no Modelo (2), podemos definir as personalidades de cada indivíduo. É claro que estas nomeações dependem da percepção de cada um, e é possível que não haja unanimidade com as relações parâmetros-personalidade adotadas aqui.

Para facilitar a leitura e fixação das personalidades, relacionamos a cada personalidade uma letra. Todas estas personalidades e suas respectivas representações em letras maiúsculas estão na

Tabela 1. Estas nomenclaturas são de fundamental importância para compor os casais que serão analisados durante este estudo.

Tabela 1: Personalidades dos indivíduos e suas representações em letras maiúsculas.

	$\tau_i < 0$	$\tau_i = 0$	$\tau_i > 0$
$\omega_i > 0$	Cauteloso (C)	Moderado (I)	Entusiasta (T)
$\omega_i = 0$	Independente (F)	Inerte (P)	Desprendido (S)
$\omega_i < 0$	Desapegado (D)	Indeciso (B)	Controverso (R)

Representamos um casal sempre pelas duas letras associadas às personalidades, como apresentadas na Tabela 1. Por exemplo, um casal formado por um Entusiasta (T) e um Cauteloso (C) pode ser representado tanto por **TC** como por **CT**, pois o que define o casal é a qualidade de cada personalidade e não qual dos parceiros é de qual personalidade.

Para que haja sentido na formação dos casais, buscamos apenas pares em que pelo menos um dos indivíduos envolvidos sinta algum tipo de reação ao sentimento do parceiro, ou seja, matematicamente, as Equações do Modelo (3) devem estar acopladas.

### 3 Casais sem Atratividade

Nesta primeira seção, foi analisado o modelo simplificado sem reação à atratividade,  $\sigma_i = 0$ . O objetivo é saber como casais reagem única e exclusivamente aos seus sentimentos intrínsecos, ao que cada parceiro sente e como ele reage ao sentimento do outro e, por isso, a atratividade não foi considerada.

Dessa forma, as equações que descrevem um casal sem atratividade são representadas no seguinte modelo:

$$\begin{cases} \frac{dx_e}{d\hat{t}} = \tau_e x_e + \omega_e x_m \\ \frac{dx_m}{d\hat{t}} = \omega_m x_e + \tau_m x_m \end{cases}, \quad (3)$$

em que  $\tau_e$  e  $\tau_m$  são as constantes de reação ao próprio sentimento; e  $\omega_e$  e  $\omega_m$  são as constantes de reação ao sentimento do parceiro, todas podendo ser positivas, negativas ou nulas. Para valores negativos de  $\tau_e$  e  $\tau_m$  teremos uma rejeição ao próprio sentimento (esquecimento) e para valores positivos teremos um endosso (apego). Outro caso que é considerado neste trabalho, mas não é considerado em [10], é o fato de um indivíduo reagir negativamente ao amor do parceiro, ou seja,  $\omega_e$  e  $\omega_m$  podem ser negativos.

#### 3.1 Pontos de Equilíbrio

Note que, no Modelo (3) é preciso considerar quatro parâmetros livres. A fim de diminuir o número de parâmetros, pode-se fazer uma normalização do modelo. Dessa forma, o Modelo (3) pode ser reescrito, equivalentemente, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_e}{dt} = sgn(\tau_e)x_e + \widehat{\omega_e}x_m \\ \frac{dx_m}{dt} = \widehat{\omega_m}x_e + \tau_m x_m \end{cases}, \quad (4)$$

em que  $\widehat{\omega_e} = \omega_e/|\tau_e|$ ,  $\widehat{\omega_m} = \omega_m/|\tau_e|$ ,  $\widehat{\tau_m} = \tau_m/|\tau_e|$  e  $\widehat{t} = t/|\tau_e|$ , e em que o sinal de  $\tau_e$  é o que determina o sinal atrelado ao termo de esquecimento ou apego de Eduardo na primeira equação

em (4). Assim, é suficiente analisar apenas o sinal da reação  $sgn(\tau_e)$  e três outros parâmetros. Claramente, o único ponto de equilíbrio deste sistema é a origem, que denota a indiferença mútua entre o casal. Por simplicidade, vamos remover os chapéus das variáveis normalizadas.

Desse modo, para  $\tau_e \neq 0$ , o Modelo (4) pode ser representado na forma matricial  $X' = \mathcal{A} \cdot X$ , isto é,

$$\begin{pmatrix} x_e' \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sgn(\tau_e) & \omega_e \\ \omega_m & \tau_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_e \\ x_m \end{pmatrix}, \quad (5)$$

em que  $\mathcal{A}$  será chamada de matriz das reações do casal. Desta maneira, se  $\tau_e < 0$ , os autovalores do sistema, representado pela equação (5), são

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left[ \tau_m - 1 \pm \sqrt{(\tau_m - 1)^2 + 4(\tau_m + \omega_c)} \right], \quad (6)$$

em que  $\omega_c = \omega_e \omega_m$ . Perceba que os autovalores da matriz de reações  $\mathcal{A}$  dependem apenas dos parâmetros  $\tau_m$  e  $\omega_c$ , e não explicitamente das reações individuais  $\omega_e$  e  $\omega_m$ . Com isso, é possível fazer um diagrama  $\omega_c \times \tau_m$  no qual podemos determinar regiões com cada tipo de ponto de equilíbrio. Considerando o Modelo (4), as condições para a classificação dos pontos de equilíbrio podem ser vistas na Tabela 2.

Tabela 2: Classificação dos pontos fixos para  $\tau_e < 0$ .

$\equiv$	$\tau_m < 1$	$\tau_m = 1$	$\tau_m > 1$
$\tau_m < -\omega_c$	focos, estrelas ou nós assintoticamente estáveis	centros estáveis	focos, estrelas ou nós instáveis
$\tau_m = -\omega_c$	pontos isolados	pontos isolados	pontos isolados
$\tau_m > -\omega_c$	sela	sela	sela

Na Figura 2, observa-se a classificação dos tipos de ponto de equilíbrio que cada casal pode apresentar. O objetivo é cruzar personalidades, observando todas as combinações de personalidades possíveis, e analisar os tipos de pontos de equilíbrio de cada tipo de casal. Utilizando a Eq. (6), é possível localizar em qual região do plano  $\omega_c \times \tau_m$  encontra-se cada casal. Paralelamente, conseguimos identificar as regiões neste mesmo plano que representam cada tipo de ponto de equilíbrio em função de  $\omega_c$  e  $\tau_m$ , apresentadas na Figura 2. A análise é feita de forma análoga para  $\tau_e > 0$ .

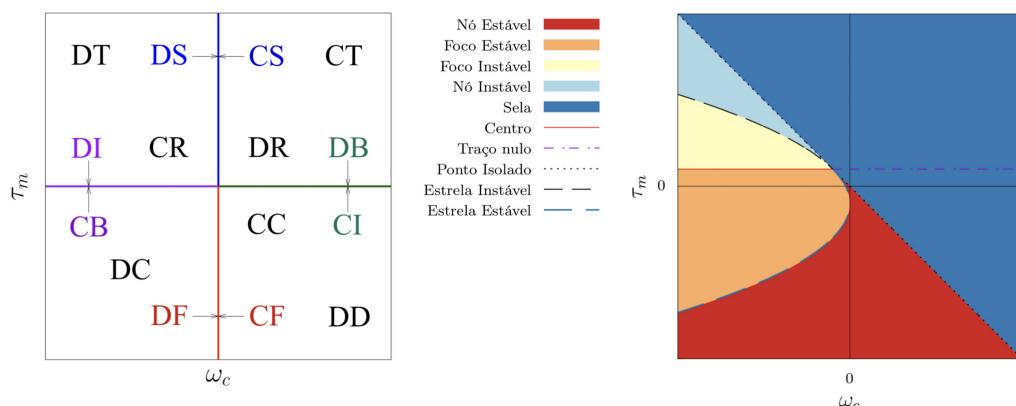


Figura 2: Distribuição das personalidades dos casais nos quadrantes do plano  $\omega_c \times \tau_m$  (esquerda), e tipos de pontos de equilíbrio para cada região (direita), para  $\tau_e < 0$ . Fonte: os autores.

### 3.2 Condições de Sucesso em Casais sem Atratividade

Nos casos em que o ponto de equilíbrio é instável, os sentimentos do casal tenderão ao infinito, podendo ser tanto positivos quanto negativos. Com o intuito de encontrar condições para relacionamentos que tenham sucesso, ou seja, que os indivíduos do casal se amem para sempre, surge a seguinte pergunta: podemos encontrar situações em que, num modelo linear homogêneo, Eduardo e Mônica poderiam viver um romance bem-sucedido?

Diante disto, perfis de casais em que o ponto de equilíbrio seja sela, nó instável ou estrela instável são considerados, neste momento, os casos de interesse. É importante ressaltar que nem todas as combinações de parâmetros resultarão em um cenário de final feliz, já que devemos buscar condições iniciais adequadas que levem os sentimentos dos indivíduos a valores positivos quando  $t$  tende ao infinito ( $t \rightarrow \infty$ ). Para encontrar estes casais, encontramos condições tais que os autovetores associados aos autovalores positivos do sistema estejam apontados no sentido do primeiro quadrante. Na Tabela 3 estão os casais que satisfazem estas condições.

Tabela 3: Casais que podem ter sucesso na relação

Sela	Nó instável	Estrela instável
CT TI TT	TT CR	TR CR
CR CC CI	RI RT	RI

Vale destacar que, apesar da simplicidade do Modelo (4), conseguimos caracterizar um relacionamento amoroso de alguns tipos de casais [3]. É claro que o fato de não limitar o sentimento nos faz perguntar o quão grande pode ser o amor ou rejeição a uma pessoa, visto que os únicos casos que julgamos serem interessantes nos fornecem relações amorosas com sentimentos que tendem a valores infinitos ou que oscilam com  $t \rightarrow \infty$ . Outra limitação desta abordagem homogênea é como duas pessoas sem atração podem sair de um estado de indiferença mútua. Partindo dessa premissa, buscamos determinar a influência da atratividade no modelo linear, abordado anteriormente, a fim de encontrar casais que terão sucesso em suas histórias de amor.

## 4 Casais com Atratividade

Explorando o conceito de atratividade em relações afetivas, apresentado em [7], e exposto em (1), partimos do caso mais simples, em que  $A_j$  é constante, isto é, considerando que um indivíduo, portador de certa atratividade, não sofre mudanças que interfiram em  $A_j$ , ao longo de uma relação. Fazendo uma adaptação do Modelo (1), podemos escrever o sistema, nos termos utilizados no Modelo (3), da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_e}{dt} = \tau_e x_e + \omega_e x_m + \sigma_e A_m \\ \frac{dx_m}{dt} = \omega_m x_e + \tau_m x_m + \sigma_m A_e \end{cases}, \quad (7)$$

em que  $\sigma_e$  e  $\sigma_m$  são as constantes das reações às atratividades e  $A_m$  e  $A_e$  são, respectivamente, a atratividade de Mônica percebida por Eduardo e a atratividade de Eduardo percebida por Mônica. Os outros termos permanecem com as mesmas definições de (4). Sem perda de generalidade, para esta primeira análise em que as atratividades são constantes, suponhamos que  $A_m = A_e = 1$  em (7), portanto, teremos o modelo na forma matricial  $X' = \mathcal{B} \cdot X + \Sigma$ ,

$$\begin{pmatrix} x_e' \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_e & \omega_e \\ \omega_m & \tau_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_e \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_e \\ \sigma_m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Note que a inserção da atratividade no modelo não irá alterar a classificação dos casais, ou seja, os tipos de pontos de equilíbrio serão os mesmos, porém, não estarão mais na origem quando  $\sigma_e \neq 0$  ou  $\sigma_m \neq 0$ . De fato, o ponto de equilíbrio será:

$$x_e^* = \frac{\sigma_m \omega_e - \sigma_e \tau_m}{\tau_e \tau_m - \omega_e \omega_m} \quad \text{e} \quad x_m^* = \frac{\sigma_e \omega_m - \sigma_m \tau_e}{\tau_e \tau_m - \omega_e \omega_m}. \quad (9)$$

De posse de (9), podemos encontrar as condições para um relacionamento estável satisfatório, ou seja, um perfil amoroso que se estabilize num ponto de equilíbrio onde ambos estejam se amando, com  $x_e^*, x_m^* > 0$ . Quando um casal tiver este perfil, diremos que obteve sucesso em sua relação.

#### 4.1 Relacionamentos Estáveis Satisfatórios (RES)

Neste momento, a finalidade é encontrar para quais valores de  $\sigma_e$  e  $\sigma_m$  os relacionamentos terão um equilíbrio estável, em que ambos os amantes estejam se amando. Graficamente, a região no plano  $x_e \times x_m$  que satisfaz esta condição é o primeiro quadrante, como na Figura 1, e queremos descobrir as condições para  $\sigma_e$  e  $\sigma_m$ , em termos de tipo de casal, que levem a focos, estrelas e nós assintoticamente estáveis, neste quadrante. Para isso, é necessário que o determinante da matriz de reações do casal seja positivo e que seu traço seja negativo. Contudo, note que o denominador das expressões (9) é justamente o determinante de  $\mathcal{B}$ . Visto que  $x_e^*$  e  $x_m^*$  devem ser positivos para satisfazer a hipótese de um relacionamento estável satisfatório, os numeradores destes pontos também devem ser positivos, ou seja,

$$\sigma_m \omega_e > \sigma_e \tau_m \quad \text{e} \quad \sigma_e \omega_m > \sigma_m \tau_e. \quad (10)$$

Como cada perfil é definido pelo sinal das suas constantes de reações, como visto na Tabela 1, só precisamos encontrar quais são as condições para  $\sigma_e$  e  $\sigma_m$  tais que  $x_e^*$  e  $x_m^*$  sejam positivos. Por outro lado, precisamos saber quais são os casais que podem representar os pontos de estabilidade viáveis. Como já mencionado, o acréscimo da atratividade no modelo não altera a análise feita em (4). Logo, os casais que poderão ter relacionamentos estáveis satisfatórios são: CC, CB, CF, CR, DC, DT, DI, DF e DD.

**Proposição 4.1.** Considerando o casal Eduardo e Mônica, ambos Cautelosos (CC), tais que  $\tau_e < 0, \omega_e > 0, \tau_m < 0$  e  $\omega_m > 0$ , para que o casal goze de um RES é necessário que o determinante da matriz de reações do casal seja positivo, ou seja,  $\tau_e \tau_m - \omega_e \omega_m > 0$ , o que implica em  $\tau_m / \omega_e < \omega_m / \tau_e$ . A outra condição a ser satisfeita é (10). Logo, temos  $\sigma_m > \sigma_e \omega_m / \tau_e$ , e  $\sigma_m > \sigma_e \tau_m / \omega_e$ .

Analizando todas as combinações viáveis de  $\sigma_e$  e  $\sigma_m$ , podemos construir a região característica de sucesso da relação deste casal no plano  $\sigma_e \times \sigma_m$ , como pode ser visto na Figura 3.

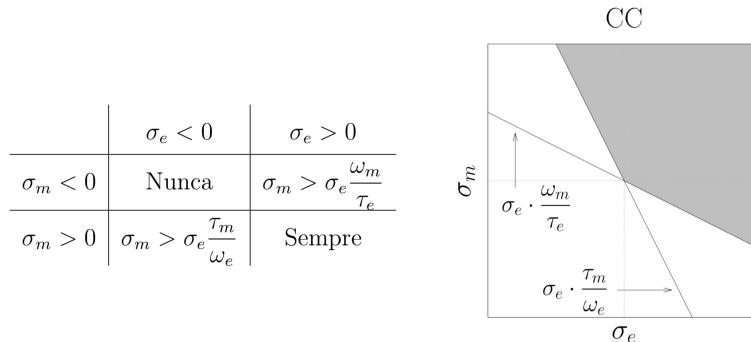


Figura 3: Diagrama de fase da atratividade para um casal CC. A região possível em que os casais terão um ponto de equilíbrio assintoticamente estável no primeiro quadrante está sombreada. Fonte: os autores.

## 5 Considerações Finais

Expandindo a teoria de [7], consideramos um modelo de dinâmica de casais em que todas as constantes podem admitir quaisquer sinais. Note que esta abordagem diverge da proposta em [7], pois ele considera apenas indivíduos seguros e imparciais — que, em nossa abordagem, correspondem aos indivíduos Cautelosos.

Perceba que, na Proposição 4.1, conseguimos mostrar que podemos estender os resultados de [7] para valores negativos de  $\sigma_e$  ou  $\sigma_m$ , dependendo apenas dos valores dos parâmetros que definem as personalidades. Além disso, fixando os parâmetros de reação ao amor e ao próprio sentimento e apenas variando os parâmetros de reação à atratividade, é possível verificar que o mesmo casal pode alcançar um relacionamento estável satisfatório, mesmo que as reações  $\sigma_e$  e  $\sigma_m$  tenham sinais diferentes, desde que obe deem as condições na Figura 3.

Portanto, o fato de um indivíduo reagir negativamente à atratividade do parceiro não implica necessariamente no término da relação. Este fenômeno não está limitado apenas ao casal apresentado na Figura 3. De fato, dentre os nove casais possíveis, pelo menos seis têm características semelhantes, com uma atenção especial ao casal CR, podendo admitir que ambos os parceiros tenham constantes de reação à atratividade negativas.

Em trabalhos futuros, investigaremos o efeito de reações limitadas na dinâmica de casais. A não linearidade das reações permitirá ao sistema sofrer bifurcações.

## Referências

- [1] J. Bowlby. **Attachment and loss**. 2a. ed. Vol. 1. Attachment. New York: Basic Books, 1969. ISBN: 978-046-5005-39-0.
- [2] R. C. Fraley e P. R. Shaver. “Adult romantic attachment: Theoretical developments, emerging controversies, and unanswered questions”. Em: **Review of General Psychology** 4 (2000), pp. 132–154. DOI: 10.1037/1089-2680.4.2.132.
- [3] A. S. Gois e Y. D. Sobral. “Um modelo linear não-homogêneo para a dinâmica de relações amorosas”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 41 (2022), pp. 010197-1–010197-2. ISSN: 2359-0793.
- [4] R. F. Hartl e A. Mehlmann. “Optimal seducing policies for dynamic continuous lovers under risk of being killed by a rival”. Em: **Cybernetics and Systems: An International Journal** 15 (1984), pp. 119–126. DOI: 10.1080/01969728408927738.
- [5] S. Jørgensen. “The dynamics of extramarital affairs”. Em: **Dynamic Economic Models and Optimal Control** (1992), pp. 239–267. DOI: 10.1080/02674659208404476.
- [6] G. Levinger. “Toward the analysis of close relationships”. Em: **Journal of Experimental Social Psychology** 16 (1980), pp. 510–544. DOI: 10.1016/0022-1031(80)90056-6.
- [7] S. Rinaldi e et al. **Modeling Love Dynamics**. Vol. 89. New York: MA, 2016. ISBN: 978-981-4696-31-9.
- [8] R. J. Sternberg. “A triangular theory of love”. Em: **Psychological Review** 93 (1986), pp. 119–135. DOI: 10.1037/0033-295X.93.2.119.
- [9] S. H. Strogatz. “Love affairs and differential equations”. Em: **Math. Magazine** 61 (1988), pp. 35–35. DOI: 10.2307/2690328.
- [10] S. H. Strogatz. **Nonlinear dynamics and chaos**. Cambridge: Perseus Books Publishing, 2000. ISBN: 978-0-8133-4910-7.