

Otimização na Modelagem de Fluxo de Rios

Fabio A. Fortunato¹, José M. Martínez²
IMECC/Unicamp, Campinas, SP

Resumo. O estudo propõe um método baseado no Lagrangeano Aumentado para estimar o coeficiente de Manning na modelagem de fluxo de rios, um parâmetro fundamental para simulações hidráulicas. A pesquisa utiliza as equações de Saint-Venant aplicadas ao rio East Fork, nos EUA, resolvidas por diferenças finitas difusas. Métodos livres de derivadas, como Nelder-Mead, BOBYQA de Powell e sua atualização PRIMA, foram empregados para minimizar o erro entre os dados simulados e observados. Os resultados demonstram que a abordagem proposta é eficiente, proporcionando estimativas precisas do coeficiente de Manning.

Palavras-chave. Lagrangeano Aumentado, Otimização Sem Derivadas, Modelagem Hidráulica, Coeficiente de Manning

1 Introdução

A modelagem de canais e rios desempenha um papel fundamental na mitigação de desastres naturais, como enchentes, e na redução de impactos decorrentes de ações humanas, como os rompimentos das barragens de Mariana (2016) e Brumadinho (2019). Para que essa modelagem seja eficaz e forneça informações confiáveis a partir de equações diferenciais, é essencial realizar uma estimativa precisa dos coeficientes hidráulicos, um problema amplamente abordado na literatura.

O coeficiente de Manning, por exemplo, quantifica o atrito entre o fluido e o leito do canal, mas não pode ser medido diretamente de forma prática. Assim, o desenvolvimento de métodos eficientes para sua estimativa torna-se de grande importância. As abordagens mais comuns são de natureza probabilística, como discutido em [12], baseando-se na geração de um grande número de simulações e na seleção da solução mais adequada com base em critérios predefinidos. No entanto, essas técnicas envolvem elevado custo computacional.

Diante disso, métodos baseados em otimização vêm ganhando destaque por oferecerem uma alternativa mais eficiente para a estimativa do coeficiente hidráulico, com redução do tempo computacional e aumento na precisão dos resultados.

No modelo proposto neste estudo, será utilizado métodos livres de derivadas amplamente utilizados na literatura. Diferentemente de abordagens que reduzem a dimensionalidade do problema — como aquelas presentes em [4], [2] e [5] —, neste trabalho são consideradas todas as variáveis do modelo, sem a realização de simplificações. Os resultados obtidos demonstraram a viabilidade da abordagem, com estimativas satisfatórias mesmo na ausência de redução dimensional.

O estudo foi motivado pelos objetivos do grupo de Pesquisa e Ação em Conflitos, Riscos e Impactos Associados a Barragens (CRIAB) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), o qual busca compreender e investigar as consequências decorrentes de desastres envolvendo barragens.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2, são apresentadas as equações de Saint-Venant e os dados do rio utilizados na modelagem. Na Seção 3, discute-se o problema de minimização, o modelo baseado na função Lagrangeana e os resultados numéricos obtidos. Por fim,

¹fabio@ime.unicamp.br

²martinez@ime.unicamp.br

na Seção 4, são apresentadas as conclusões do estudo, acompanhadas de sugestões para trabalhos futuros.

2 Modelagem do Rio East Fork com as Equações de Saint-Venant

Existem diversas equações capazes de modelar o escoamento de um fluido. No caso tridimensional, as mais famosas são as equações de Navier-Stokes. Em algumas situações, é possível simplificá-las de diferentes formas, obtendo assim equações mais acessíveis para determinados contextos. Um exemplo clássico no caso unidimensional são as equações de Saint-Venant, amplamente utilizadas para descrever o comportamento de rios e canais. As equações de Saint-Venant são dadas por

$$\begin{aligned} A_t + Q_x &= 0 \\ Q_t + (QV)_x + gAz_x + \frac{n_g^2 Q|Q|}{R^{4/3}A} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

em que $A(x, t)$ representa a área transversal, $Q(x, t)$ a vazão, $V(x, t)$ a velocidade da água, $z(x, t)$ a cota de fundo, g a constante gravitacional, R o raio hidráulico e n_g o coeficiente de Manning (coeficiente de rugosidade). Nessa modelagem, são considerados apenas os cortes transversais do canal como mostrado na Figura 1. Para mais informações veja [7] e [9].

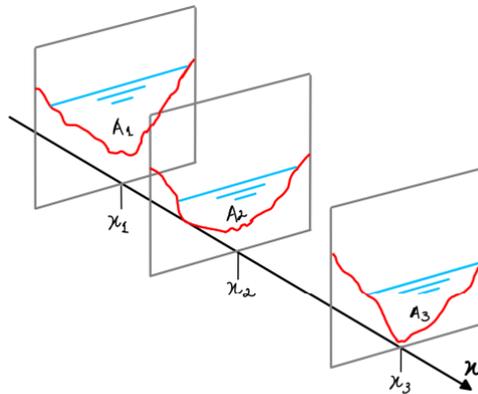


Figura 1: Cortes transversais considerados das Equações de Saint-Venant.
Fonte: Moura Júnior 2002 [7].

Neste trabalho, utilizamos os dados do rio East Fork, disponíveis em Meade (1979) [6], localizado no estado de Wyoming, EUA. O trecho analisado possui aproximadamente 3,3 quilômetros de extensão, e os dados considerados correspondem ao período de 17 de maio a 17 de junho de 1979, totalizando 31 dias de observações. As estações do rio, como ilustrada na Figura ??, são os pontos de coleta de dados. Tais dados são referente aos dados iniciais e de contorno.

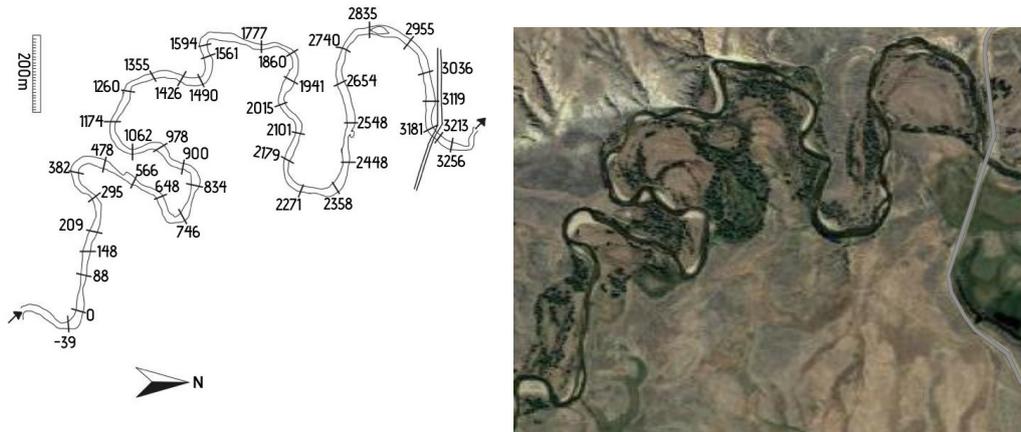


Figura 2: Representação das estações de coleta de dados no rio East Fork (imagem (a)) e imagem de satélite do mesmo trecho analisado (imagem (b)). Fonte: Ayvaz 2013 [1]

Para resolver as equações de Saint-Venant, será utilizado o método de diferenças finitas difuso descrito em [9, p. 405]. Esse método foi escolhido porque, por ser explícito, o custo computacional para simular os 31 dias do modelo é relativamente baixo.

3 Estimativa do Coeficiente de Manning com Lagrangeano Aumentado

Considerando uma discretização da equação 1 no espaço em n_x pontos equidistantes, tem-se que em cada ponto da discretização existe um valor específico para o coeficiente de Manning. Isso significa que, quanto maior o refinamento da malha, maior será o número de coeficientes que precisam ser estimados. Nesse contexto, considerando-se n_t instantes de tempo para os quais existem dados disponíveis que não foram utilizados nas condições de contorno, pretende-se obter $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_x})$ tal que, para todo $i = 1, \dots, n_t$ e $j = 1, \dots, n_x$, a seguinte igualdade seja satisfeita:

$$F_j^i(\xi) - y_j^{obs_i} = 0.$$

Nessa expressão, $F_j^i(\xi)$ representa o valor previsto pelas equações do modelo no instante t_i e na posição x_j , enquanto $y_j^{obs_i}$ corresponde ao valor observado experimentalmente nesses mesmos ponto e instante. Além de impor restrições à busca, como $0 \leq \xi \leq \xi_{max}$ considerando-se que o coeficiente de Manning não apresenta grandes variações ao longo do rio, ou seja, tende a permanecer aproximadamente constante em média. Dessa forma, o problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_{(\xi, \xi_{aux})} & \sum_{i=1}^{n_x} (\xi_i - \xi_{aux})^2 \\ \text{sujeito a} & F_i(\xi) - y^{obs_i} = 0 \text{ com } i = 1, \dots, n_t. \\ & 0 \leq \xi_i \leq \xi_{max} \text{ com } i = 1, \dots, n_x. \end{aligned} \tag{2}$$

Ou seja, será introduzida a variável ξ_{aux} para controlar a variação do coeficiente de Manning ao longo do domínio, buscando minimizar as diferenças entre os valores ξ_i e ξ_{aux} para $i = 1, \dots, n_x$. O problema também leva em conta a necessidade de a equação representar o canal corretamente e inclui uma restrição de intervalo para os coeficientes limitando o espaço de busca.

Uma abordagem para resolver esse problema de minimização é utilizar o Lagrangiano Aumentado, incorporando as restrições na função objetivo. Para mais detalhes, consulte [3]. Dessa forma, o problema 3 é reformulado em subproblemas de minimização da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & L_{\rho_k}(\xi, \xi_{aux}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n_x} (\xi_i - \xi_{aux})^2 + \frac{\rho_k}{2} \sum_{i=1}^{n_t} \left(F_i(\xi) - y^{obs_i} + \frac{\lambda_i^k}{\rho_k} \right)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & 0 \leq \xi_i \leq \xi_{max} \text{ com } i = 1, \dots, n_x \end{aligned} \quad (3)$$

com $k = 1, 2, \dots$. Para minimizar esse problema do tipo caixa, serão utilizados o clássico método de Powell BOBYQA [10], a atualização do BOBYQA descrita em [11] e o algoritmo de Nelder-Mead [8].

Para resolver as equações diferenciais foi considerado uma discretização do rio de 101 pontos equidistantes ($n_x = 101$) e um passo de tempo de $\Delta t = 0.1s$. Os dados utilizados para estimativa do coeficiente foram os dados de elevação ($z(x, t)$) na estação $x = 751m$ e na estação de saída $x = 3256m$. Esses dados foram coletados a partir do dia 20 de maio, três dias após os dados das condições iniciais, a cada 4 horas gerando 168 restrições no problema 3. Para a minimização dos subproblemas (as funções de Lagrange), foram empregados três métodos: o algoritmo Nelder-Mead, o software PRIMA (uma atualização do BOBYQA) implementado em Fortran 90 e o clássico BOBYQA de Powell, programado em Fortran 77. Foram necessárias 5.054 avaliações de função para o método Nelder-Mead, 2.630 para o software PRIMA e 4.196 para o método BOBYQA de Powell.

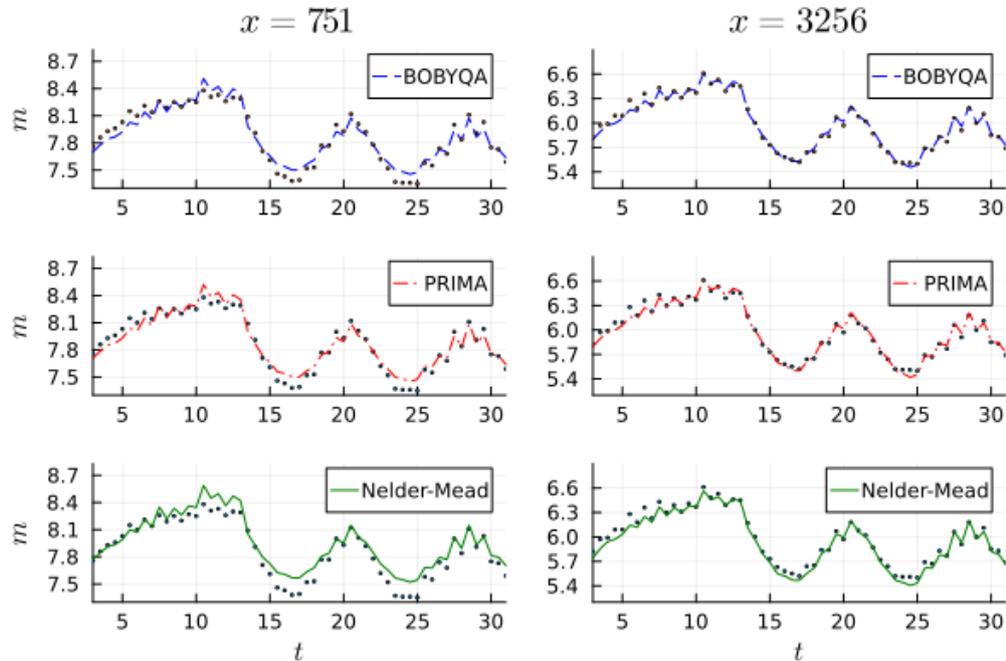


Figura 3: Comparação dos resultados obtidos, elevação $z(x, t)$ nos pontos $x = 751m$ e $x = 3256m$, com os dados observados (representados no gráfico por marcadores circulares).

Fonte: Autoria própria.

4 Conclusão

Neste trabalho, foi proposta a solução de um problema inverso em hidráulica por meio de um esquema de Lagrangeano Aumentado, combinado com métodos livres de derivadas, para a estimativa do coeficiente de Manning, um problema amplamente estudado na área. A abordagem baseada em otimização tem se mostrado cada vez mais eficaz, frequentemente superando métodos tradicionais amplamente utilizados [1], [2], [5], [12]. Os resultados obtidos demonstraram que todos os métodos testados foram capazes de modelar satisfatoriamente os dados do rio, representando um avanço em relação ao trabalho de [4], que descreve adequadamente o canal apenas em um ponto. Embora o método Nelder-Mead tenha apresentado uma solução razoável para o problema, os softwares BOBYQA e PRIMA obtiveram resultados superiores, utilizando um número menor de avaliações da função. Como proposta para trabalhos futuros, pretende-se aplicar diferenciação automática ao esquema difusivo de Porto [9], em combinação com técnicas de minimização, como o FISTA, o método do gradiente espectral e métodos quasi-Newton.

Agradecimentos

Este estudo foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

- [1] M. T. Ayvaz. “A linked simulation–optimization model for simultaneously estimating the Manning’s surface roughness values and their parameter structures in shallow water flows”. Em: **Journal of Hydrology** 500 (2013), pp. 183–199. ISSN: 0022-1694. DOI: 10.1016/j.jhydro.2013.07.019.
- [2] E. G. Birgin e J. M. Martínez. “Accelerated derivative-free nonlinear least-squares applied to the estimation of Manning coefficients”. Em: **Computational Optimization and Applications** 81 (2021), pp. 689–715. DOI: 10.1007/s10589-021-00344-w.
- [3] E. G. Birgin e J. M. Martínez. “Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization”. Em: **Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)**. MOS-SIAM Series on Optimization 10 (2014). DOI: 10.1137/1.9781611973365.
- [4] F. A. Fortunato. “Otimização sem derivadas para coeficientes hidráulicos”. Dissertação de mestrado. Campinas, SP: Unicamp/IMECC, 2023.
- [5] J. M. Martínez e L. T. Santos. “Inexact-restoration modelling with monotone interpolation and parameter estimation”. Em: **Optimization and Engineering** (out. de 2023), pp. 1–20. DOI: 10.1007/s11081-023-09861-5. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11081-023-09861-5>.
- [6] R. H. Meade, R. M. Myrick e W. W. Emmett. **Field Data Describing the Movement and Storage of Sediment in the East Fork River, Wyoming, Part II**. USGS Open-File, 1979. DOI: 10.3133/ofr801190.
- [7] R. C. Moura. “Resolução Numérica das Equações de Saint-Venant pelo Método de Galerkin Descontínuo”. Dissertação de Mestrado. Unicamp/IMECC, 2022.
- [8] J. A. Nelder e R. Mead. “A Simplex Method for Function Minimization”. Em: **The Computer Journal** 7.4 (jan. de 1965), pp. 308–313. ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308. eprint: <https://academic.oup.com/comjnl/article-pdf/7/4/308/1013182/7-4-308.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>.

- [9] R. Porto. **Hidráulica Básica**. Vol. 1. EESC - USP, 1999.
- [10] M. J. D. Powell. **The BOBYQA algorithm for bound constrained optimization without derivatives**. Rel. técn. NA2009/06. Department of Applied Mathematics e Theoretical Physics, University of Cambridge, 2009. URL: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/NA_papers/NA2009_06.pdf.
- [11] T. M. Ragonneau e Z. Zhang. “PDFO: a cross-platform package for Powell’s derivative-free optimization solvers”. Em: **Mathematical Programming Computation** 16 (2024), pp. 1–25. DOI: 10.1007/s12532-023-00244-1. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12532-023-00244-1>.
- [12] X. Zeng, J. Zhang, Y. Li, Y. Liu, W. Liu e D. Liu. “Estimation of river discharge using Monte Carlo simulations and a 1D hydraulic model based on the artificial multi-segmented rating curves at the confluence of two rivers”. Em: **Environmental Research Communications** 4.8 (2022), p. 081004. DOI: 10.1088/2515-7620/ad277c. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2515-7620/ad277c>.