

Ladrilhamentos por Poliominós na Norma l_p *

Antonio Campello

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: campello@ime.unicamp.br

Grasiele C. Jorge

Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP
12231-280, São José dos Campos, SP
E-mail: grasiele.jorge@unifesp.br

João E. Strapasson

Faculdade de Ciências Aplicadas, UNICAMP
13484-350, Limeira, SP
E-mail: joao.strapasson@fca.unicamp.br

Sueli I. R. Costa

Departamento de Matemática, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: sueli@ime.unicamp.br

Resumo: *O objetivo deste trabalho é estudar ladrilhamentos de \mathbb{R}^n por poliominós associados à norma l_p . No caso $p = 1$, a Conjectura de Golomb-Welch, em aberto por cerca de 44 anos, propõe que não existe ladrilhamento por tais poliominós, exceto em casos muito especiais. Aqui estamos interessados em discutir a existência de ladrilhamentos no caso geral $1 \leq p \leq \infty$. Apresentamos resultados não-existenciais de ladrilhamentos para diferentes valores de p , bem como um estudo da forma e das propriedades combinatórias dos poliominós associados.*

Palavras-chave: *Reticulados, Poliominós, Códigos Perfeitos, Métrica de Lee*

1 Introdução

Um *poliominó* em \mathbb{R}^n é uma figura conexa formada pela união finita de cubos de lado unitário de tal maneira que pares de cubo são disjuntos ou compartilham uma face (de dimensão $k < n$). Um poliominó pode ser construído através da união de cubos centrados em pontos de \mathbb{Z}^n contidos em uma bola na norma l_p , como mostrado na Fig. 1.

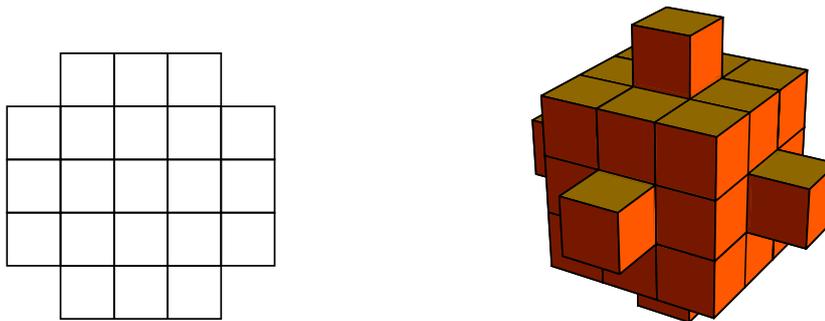


Figura 1: À esquerda, o poliominó $L_2(2, \sqrt{5})$ e à direita $L_4(3, 2)$, conforme definido na Seção 2.1

Além do interesse puramente combinatório, o estudo de ladrilhamentos de \mathbb{R}^n por poliominós surge naturalmente no contexto de códigos corretores de erros. A conexão mais antiga é através de códigos na métrica de Lee, proposta por Golomb e Welch em [4]. No artigo em questão, os autores mostram que códigos perfeitos na métrica de Lee em \mathbb{Z}^n estão associados a ladrilhamentos de \mathbb{R}^n por poliominós na norma l_1 . A partir daí, é enunciada a seguinte conjectura: não existem códigos perfeitos na métrica de Lee para raio $R > 1$ e $n > 2$. Apesar de diversas tentativas e

*Este trabalho teve o apoio da FAPESP proc. 2011/22044-4 e 2011/01096-6 e do CNPQ proc. 150802/2012-9 e 309561/2009-4

resultados parciais (ver e.g., o recente artigo [5] e as referências nele contidas), o caso geral da Conjectura de Golomb-Welch encontra-se ainda em aberto. Mais recentemente, Schwartz [11] estuda a existência de ladrilhamentos por poliomínos conhecidos como quasi-cruzes, os quais possuem aplicações no desenvolvimento de códigos para memórias flash.

Apesar de largamente estudada, e.g. [4, 5], a conjectura de Golomb-Welch só tem uma resposta definitiva para casos bem especiais (por exemplo, $n = 2, 3, 4$). Assim, é de interesse considerar ladrilhamentos por estruturas que generalizam os poliomínos considerados por Golomb e Welch em [4]. Algumas generalizações na literatura incluem o estudo de códigos quasi-perfeitos, diâmetro-perfeito, e conjuntos perfeitamente dominantes. O objetivo deste artigo é estudar ladrilhamentos de \mathbb{R}^n por poliomínos associados a códigos perfeitos em \mathbb{Z}^n na norma l_p .

O trabalho está organizado conforme descrito a seguir. Na Seção 2 descrevemos definições iniciais e resultados anteriores acerca do tema. Na Seção 3 analisamos a forma dos poliomínos, descrevendo o raio crítico. Na Seção 3, estabelecemos um teorema assintótico de não-existência de ladrilhamentos, bem como resultados específicos para poliomínos em \mathbb{R}^2 na norma l_2 .

2 Preliminares e Resultados Anteriores

Seja \mathbb{Z}^n o conjunto de todos os vetores cujas entradas são inteiras. Sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} dois vetores de \mathbb{Z}^n (ou \mathbb{R}^n). Denotamos a usual distância l_p , $1 \leq p < \infty$ por

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{e} \quad d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, n\}.$$

A norma p $\|\cdot\|_p$ correspondente é dada por $\|\mathbf{x}\|_p = d_p(\mathbf{x}, \mathbf{0})$. A bola fechada de raio R centrada em \mathbf{x} é dada por:

$$B_p^n(\mathbf{x}, R) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d_p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq R\}. \tag{1}$$

Por simplicidade, a bola de raio R centrada na origem será denotada por $B_p^n(R)$. Nosso objeto de estudo, um *poliomínó na norma l_p* , é definido como a união de cubos de lado unitário centrados em pontos inteiros contidos em $B_p^n(R)$ (isto é, os pontos de $B_p^n(R) \cap \mathbb{Z}^n$). Mais formalmente, definimos o poliomínó (associado à bola centrada na origem) $L_p(n, R)$ como:

$$L_p(n, R) = \bigcup_{\mathbf{x} \in B_p^n(R) \cap \mathbb{Z}^n} \left(\mathbf{x} + \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \right). \tag{2}$$

Na Fig. 1 encontram-se ilustrados alguns poliomínos em diferentes normas.

Uma boa parte do estudo de poliomínos na literatura está interessada em saber quando um poliomínó ladrilha ou não o \mathbb{R}^n . Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de volume finito. Um conjunto de translações de K com interiores disjuntos é dito um *empacotamento* de K . Se, adicionalmente, tal união é igual ao espaço inteiro \mathbb{R}^n , chamamos-na de *ladrilhamento* de \mathbb{R}^n . Se existe algum ladrilhamento de \mathbb{R}^n por cópias de K , dizemos que K ladrilha \mathbb{R}^n .

Conjuntos K de interesse na literatura incluem poliomínos [4, 11], politopos-cruz [3] (isto é $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_1 = R\}$) e bolas na norma l_p ($K = B_p^n(R)$) [10]. Bolas na norma l_p não ladrilham \mathbb{R}^n , exceto nos casos $p = 1$ ($n = 2$) e $p = \infty$ (qualquer n), portanto os problemas associados a esses conjuntos dizem respeito ao arranjo mais eficiente, ou com maior densidade de empacotamento, no espaço.

Alguns resultados sobre ladrilhamento por poliomínos na norma l_p encontram-se enunciados no que se segue.

Proposição 1. [4] *O poliomínó $L_1(2, R)$ ladrilha \mathbb{R}^2 para qualquer $R \geq 0$.*

O próximo resultado foi provado em [4] para $p = 1$ e em [8] para $1 \leq p < \infty$.

Proposição 2 ([4, 8]). *O poliomínó $L_p(n, 1)$ ladrilha \mathbb{R}^n para qualquer $n \geq 2$.*

Conjectura (de Golomb-Welch [4]). *Para $n > 2$ e $R > 1$, o poliomínó $L_1(n, R)$ não ladrilha o \mathbb{R}^n .*

Em [8], havia sido proposta uma extensão da conjectura de Golomb-Welch para as métricas p . De fato, essa conjectura é falsa se considerarmos valores de R não-inteiros - permanecendo apenas o caso da métrica l_1 . Mais precisamente, pode-se mostrar que para qualquer n existe um p_0 tal que se $p > p_0$ o poliomínó $L_p(n, Rn^{1/p})$ ladrilha \mathbb{R}^n .

No que se segue revemos alguns conceitos sobre reticulados. Para maiores informações, sugerimos a referência [2]. Um *reticulado* (inteiro) $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ é um conjunto da forma $\{\mathbf{u}B : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n\}$, onde B é uma matriz $n \times n$ não singular. Alternativamente, um reticulado é um subgrupo aditivo discreto de \mathbb{Z}^n . Dizemos também que um reticulado é um *código (linear)* em \mathbb{Z}^n . Apesar de a Teoria de Códigos estar usualmente relacionada a códigos no espaço vetorial \mathbb{Z}_q^n , q primo, códigos em \mathbb{Z}^n vem sendo estudados mais recentemente, principalmente no que tange a sua relação com códigos na métrica de Lee [3, 5].

A distância mínima $d_p(\Lambda)$ de um código $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ na norma l_p é definida como a menor distância entre dois elementos de Λ , ou equivalentemente, $d_p(\Lambda) = \min_{\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}} \|\mathbf{x}\|_p$. Um reticulado é um *código perfeito* (com raio R) na norma l_p se existe $R > 0$ tal que as bolas $B_p^n(\mathbf{x}, R) \cap \mathbb{Z}^n$ centradas em pontos $\mathbf{x} \in \Lambda$ são todas disjuntas duas a duas e cobrem todo o \mathbb{Z}^n . Alternativamente, um reticulado é um código perfeito se, e somente se, o poliomínó $L_p(n, R)$ ladrilha o \mathbb{R}^n por translações dos pontos de Λ .

Um reticulado induz um empacotamento em \mathbb{R}^n por bolas na norma l_p de raio $\rho = d(\Lambda)/2$. A *densidade de empacotamento* de um reticulado é definida como $\Delta(\Lambda) = \text{vol}(B_p^n(\rho))/|\det B|$. Para $1 < p < \infty$, a densidade é sempre um número estritamente menor que 1. Encontrar a maior densidade em \mathbb{R}^n é um dos problemas centrais da teoria de reticulados [2].

3 O Raio Crítico

Para $p = 1$ e $p = \infty$, é fácil ver que cada $R \in \mathbb{N}$ está associado a um poliomínó distinto (isto é, $L_1(n, R_1) \neq L_1(n, R_2)$ se $R_1, R_2 \in \mathbb{N}$ e $R_1 \neq R_2$). Além disso, estes são os únicos raios em que ocorre uma mudança no tamanho do poliomínó, isto é $L_1(n, R) = L_1(n, R + \varepsilon)$ para $0 \leq \varepsilon < 1$. De uma certa forma, portanto, esses são os únicos raios relevantes para o estudo de tais poliomínós. Para $1 < p < \infty$ é possível que o poliomínó mude de tamanho para raios que não são inteiros. Surge a necessidade de definir um raio crítico que, intuitivamente, é um raio tal que ocorre mudança de “tamanho” em $L_p(n, R)$. Dizemos, assim, que R é um *raio crítico* de um poliomínó na norma l_p , $1 \leq p \leq \infty$ se $L_p(n, R - \varepsilon) \subsetneq L_p(n, R)$, para qualquer $\varepsilon > 0$. Em outras palavras, um raio R é crítico se existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\|\mathbf{x}\|_p = R$.

Denotemos por $\mathcal{R}(n, p)$ o conjunto de raios críticos de poliomínós na norma l_p em \mathbb{Z}^n . Segue facilmente da definição que $\mathcal{R}(n, p) \subset \{0, 1^{1/p}, 2^{1/p}, 3^{1/p}, \dots\}$. Entretanto nem todo elemento tal que R^p é inteiro é um raio crítico, como visto abaixo:

Exemplo 1. *Tome $p = 2$ e $n = 2$. Temos que*

$$B_2^2(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Z}^2 = B_2^2(\sqrt{3}) \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}.$$

Além disso $(\pm 1, \pm 1) \notin B_2(\sqrt{2} - \varepsilon) \cap \mathbb{Z}^2$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Portanto $\sqrt{2}$ é um raio crítico, enquanto $\sqrt{3}$ não é um raio crítico, apesar de ambos pertencerem ao conjunto $\{0, 1^{1/2}, 2^{1/2}, 3^{1/2}, \dots\}$.

Na norma l_2 , podemos caracterizar completamente os raios críticos através de teoremas de soma de quadrados da Teoria dos Números.

Proposição 3. *Um número $R \in \{0, 1^{1/p}, 2^{1/p}, 3^{1/p}, \dots\}$ é um raio crítico com respeito a um poliomínó na norma l_2 em \mathbb{R}^n se, e somente se,*

- (i) $n = 2$ e R^2 pode ser escrito na forma $R^2 = ab^2$, onde a não possui nenhum fator primo $q \equiv 3 \pmod{4}$; ou
- (ii) $n = 3$ e R^2 não é da forma $4^m(8k + 7)$, para $m, k \in \mathbb{N}$; ou
- (iii) $n \geq 4$.

Demonstração. As propriedades acima são consequências diretas de teoremas da Teoria dos Números acerca de somas de quadrados. As afirmativas (i) e (iii) são consequências do Teorema dos Dois Quadrados e Teorema dos Quatro Quadrados (veja, e.g., [7]). A propriedade (ii) segue do Teorema dos Três Quadrados, o qual pode ser encontrado (na forma em que necessitamos), em [12, p. 45]. \square

Existe uma interessante conexão entre o raio crítico de um poliomínó e o problema de Waring (e.g. [1]). Sejam $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. O problema de Waring pergunta pelo menor inteiro k tal que qualquer número inteiro $m \in \mathbb{N}$ pode ser escrito como $m = x_1^p + \dots + x_k^p$, pra $x_i \in \mathbb{N}$. O problema é bem definido [1] no sentido de que tal k sempre existe.

Seja $g(p)$ a solução para o problema de Waring para $p \in \mathbb{N}$. Dos teoremas de somas de quadrados, temos claramente que $g(2) = 4$. No survey [1] é apresentado o estado-da-arte no problema de Waring. Em particular, valem: $g(3) = 9, g(4) = 19$ e, sob algumas condições, $g(p) = 2^p + \lfloor (3/2)^p \rfloor - 2$ (em especial para $k \leq 417.600.000$ a fórmula é válida). A finitude de $g(p)$ implica diretamente a seguinte proposição:

Proposição 4. Para $n \geq g(p)$, $\mathcal{R}(n, p) = \{0, 1^{1/p}, 2^{1/p}, 3^{1/p}, \dots\}$.

Demonstração. Basta observar que se $R \in \{0, 1^{1/p}, 2^{1/p}, 3^{1/p}, \dots\}$, então R^p é inteiro, e assim pode ser escrito como a soma de $g(p)$ (ou mais) potências de k . Deste modo, R é o raio de crítico de algum poliomínó na norma l_p em \mathbb{Z}^n . \square

4 Teoremas de Não-Existência

Seja $\mu_p(n, R)$ o número de pontos de \mathbb{Z}^n na bola da distância l_p com raio R , isto é

$$\mu_p(n, R) = \# \left(\mathbb{Z}^n \cap B_p^n(R) \right),$$

onde $\#M$ denota a cardinalidade de um conjunto finito M . Abaixo apresentamos uma demonstração que para n e p fixados e R suficientemente grande o poliomínó $L_p(n, R)$ não ladrilha \mathbb{R}^n . A ideia é estudar o empacotamento de bolas na norma l_p associado a um código perfeito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$. Para a nossa discussão, será necessário o seguinte lema, cuja demonstração pode ser obtida através dos mesmos argumentos que [9, pp. 134-135]

Lema 1. Seja Λ um reticulado de posto completo com matriz geradora B e seja $S(R) = \Lambda \cap B_p^n(R)$ o conjunto dos pontos de Λ contidos em $B_p^n(R)$. Temos:

$$\sqrt{|\det B|} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B_p^n(R))}{\#S(R)}.$$

Teorema 1. Seja $n > 2$ e $1 \leq p < \infty$. Existe $\bar{R}_{n,p} > 0$ tal que para $R > \bar{R}_{n,p}$ não há códigos perfeitos lineares $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ com raio R .

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe um código perfeito com raio R . O volume do poliomínó $L_p(n, R)$ é igual a $\mu_p(n, R)$ e as cópias de $L_p(n, R)$ por pontos de Λ ladrilham \mathbb{R}^n .

Por outro lado, o raio de empacotamento do reticulado Λ na norma l_p é certamente maior ou igual a $R - \varepsilon$ (para algum ε arbitrariamente pequeno) e portanto possui densidade:

$$\delta \geq \frac{\text{vol}(B_p^n(R - \varepsilon))}{\text{vol}(L_p(n, R))} = \frac{\text{vol}(B_p^n(R - \varepsilon))}{\mu_p(n, R)}. \tag{3}$$

Sabemos que o lado direito da desigualdade acima tende a $\det L_n = 1$ quando R tende a infinito (Lema 1). Mas também sabemos que a densidade de empacotamento de qualquer reticulado em \mathbb{R}^n na norma l_p é limitada superiormente por algum $\alpha < 1$. Assim, para R suficientemente grande, construímos um empacotamento que ultrapassa a melhor densidade de empacotamento em \mathbb{R}^n , o que é um absurdo, concluindo a demonstração. \square

Acima analisamos o poliomínos $L_p(n, R)$ para n e p fixo, variando R . A partir de agora, faremos uma análise distinta, na qual permitimos variar o valor de p . Uma questão interessante é a existência ou não existência de ladrilhamentos para valores de $p > 1$.

Definição 1. *Seja $L_p(n, R)$ o poliomínó dado por (2). Seja a um número inteiro e considere $Z_a = \mathbb{Z}^n \cap [-a, a]^n$ o conjunto de pontos inteiros contidos no cubo de lado $2a$ centrado na origem.*

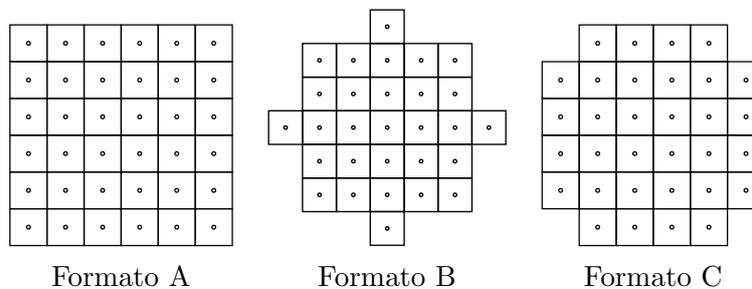
- Se $B_p^n(R) \cap \mathbb{Z}^n = Z_a$, para algum a , dizemos que $L_p(n, R)$ possui formato A.
- Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^n e

$$B_p^n(R) \cap \mathbb{Z}^n = Z_a \cup (\pm(a + 1))e_1 \cup (\pm(a + 1))e_2 \dots \cup (\pm(a + 1))e_n,$$

para algum a , dizemos que $L_p(n, R)$ possui formato B.

- Se $B_p^n(R) \cap \mathbb{Z}^n = Z_a \setminus \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = \pm a, i = 1, \dots, n\}$ para algum a , dizemos que $L_p(n, R)$ possui formato C.

Segue imediatamente da definição que $L_\infty(n, R)$ possui formato A, com $a = \lfloor R \rfloor$. Além disso, o número de pontos em $B_p^n(R) \cap \mathbb{Z}^n$ para poliomínos do tipo A, B e C é, respectivamente, $(2a + 1)^n$, $(2a + 1)^n + 2n$ e $(2a + 1)^n - 2^n$. Na proposição seguinte identificamos os três padrões de poliomínos definidos acima.



Proposição 5. *Fixados um raio crítico $R \in \mathcal{R}(n, p)$ e uma dimensão n , temos que:*

- (i) Se R é inteiro e $\frac{\ln n}{\ln(\frac{R}{R-1})} \leq p < \infty$, então $L_p(n, R)$ tem formato B, com $a = R - 1$.
- (ii) Se R não for inteiro e $\frac{\ln n}{\ln(\frac{R}{\lfloor R \rfloor})} \leq p < \infty$, então $L_p(n, R)$ tem o formato A, com $a = \lfloor R \rfloor$.
- (iii) Se p é tal que $((n - 1)\lfloor R \rfloor^p + (\lfloor R \rfloor - 1)^{1/p} \leq R \leq n^{1/p}\lfloor R \rfloor$, então $L_p(n, R)$ tem o formato C, com $a = \lfloor R \rfloor$.

Demonstração. (i) Se R é inteiro, note que $B_\infty^n(R - 1) \subseteq B_p^n(R) \subseteq B_\infty^n(R)$ se, e somente se, $p \geq \frac{\ln n}{\ln(\frac{R}{R-1})}$. De fato, a segunda inclusão sempre acontece independente do valor de p . Para a primeira inclusão temos: se $x \in B_\infty^n(R - 1)$, então $\|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty \leq n^{1/p}(R - 1) \leq R$ se, e somente se, $n^{1/p} \leq \frac{R}{R-1}$, de onde segue o resultado.

- (ii) Se R não é inteiro, então $B_\infty^n(\lfloor R \rfloor) \subseteq B_p^n(R) \subseteq B_\infty^n(\lceil R \rceil)$ se, e somente se, $\frac{\ln n}{\ln(\frac{R}{\lfloor R \rfloor})} \leq p < \infty$. Daí, para todo $p \geq \frac{\ln n}{\ln(\frac{R}{\lfloor R \rfloor})}$, o poliomínó tem formato A.
- (iii) Para que a bola na métrica p deixe apenas os cantos de fora, seu raio deve ser um pouco maior que a distância da origem até o ponto $(\lfloor R \rfloor, \lfloor R \rfloor, \dots, \lfloor R \rfloor, \lfloor R \rfloor - 1)$ que é $((n - 1)\lfloor R \rfloor^p + (\lfloor R \rfloor - 1)^p)^{1/p}$ e um pouco menor que a distância da origem até o canto $(\lfloor R \rfloor, \lfloor R \rfloor, \dots, \lfloor R \rfloor, \lfloor R \rfloor)$ que é $n^{1/p}\lfloor R \rfloor$.

□

4.1 Estimativas para $\bar{R}_{2,2}$

Utilizando a demonstração do Teorema 1, podemos estimar quais são os raios a partir dos quais não há códigos perfeitos. No caso $\bar{R}_{n,2}$ temos que conhecer essencialmente duas grandezas: a densidade do melhor empacotamento em dimensão n , Δ_n , e uma fórmula (ao menos aproximada) para $\mu_2(n, R)$ (do Lema 1, segue que $\mu_2(n, R) \approx \pi R^2$ para R grande). O problema de determinar $\mu_2(n, R)$ é conhecido como o Problema do Círculo de Gauss. Argumentos elementares podem ser usados para mostrar que:

$$\mu_2(n, R) = \pi R^2 + E(R), \text{ onde } |E(R)| \leq 2\sqrt{2}\pi R \tag{4}$$

Resultados mais recentes melhoram essa estimativa para $E(R) \leq CR^\theta$, para alguma constante C . O melhor expoente θ conseguido até então é aproximadamente 0.62981 devido a Huxley [6], entretanto na prática a constante C pode ser muito grande. Utilizando a estimativa (4), e os argumentos da demonstração do teorema acima, vemos que a equação (3) ultrapassa $\Delta_2 = \pi/3\sqrt{2}$ (densidade do empacotamento hexagonal [2, p.15]) para $R \geq 45.1973$. Assim, como consequência do Teorema 1 para $R \geq 46$ o poliomínó $L_2(2, R)$ não ladrilha \mathbb{R}^2 .

Apesar de o limitante (4) poder ser usado para demonstrar que $\bar{R}_{2,2} \leq 46$, experimentos computacionais sugerem que esta fórmula pode ser aprimorada. No gráfico abaixo, vemos que para $R > 19$, a equação (3) viola a maior densidade de empacotamento possível.

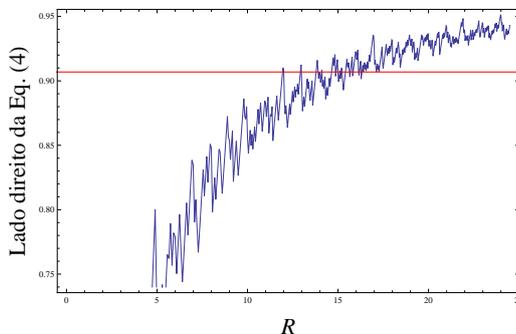


Figura 2: Experimentos para determinação de $\bar{R}_{2,2}$. A linha vermelha refere-se ao valor $\Delta_2 = \pi/3\sqrt{2}$, melhor densidade de empacotamento no plano.

5 Conclusões e Perspectivas Futuras

Os poliomínós definidos pelo Caso (i) da Proposição 5 sugerem que não existem códigos perfeitos com raio inteiro para valores de p suficientemente grandes. Para o raio crítico $R = 2$ e $n = 2$ existem códigos perfeitos com tal formato para $1 \leq p < \infty$, como pode ser visto na Figura 3. Entretanto, à medida que aumentamos o raio, o Teorema 1 afirma que não há códigos perfeitos para valores de *raio crítico* suficientemente grande. A determinação precisa dos menores valores de R e p que não admitem códigos perfeitos, bem como demonstrações analíticas que poliomínós com determinados formatos específicos não ladrilham \mathbb{R}^n são perspectivas de trabalhos futuros.

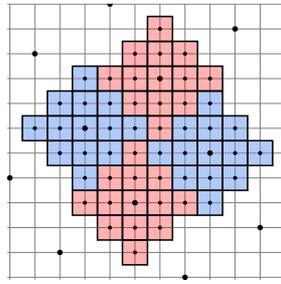


Figura 3: $L_p(2, 2)$, $1 \leq p < \infty$

Referências

- [1] Waring’s problem: a survey. *Number Theory for the Millennium, III (Urbana, IL, 2000)*, pages 301–340, 2012.
- [2] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere-packings, lattices, and groups*. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1998.
- [3] T. Etzion, A. Vardy, and E. Yaakobi. Dense error-correcting codes in the Lee metric. In *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, pages 1–5, Aug 2010.
- [4] S.W. Golomb and L. R. Welch. Perfect Codes in the Lee Metric and the Packing of Polyominoes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 18(2):302–317, 1970.
- [5] Peter Horak and Otokar Grosek. A new approach towards the Golomb-Welch conjecture. *European Journal of Combinatorics*, 38(0):12 – 22, 2014.
- [6] M. N. Huxley. Exponential sums and lattice points iii. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 87:591–609, 11 2003.
- [7] H. L. Montgomery I. Niven, H. S. Zuckerman. *An Introduction to The Theory of Numbers*. Wiley.
- [8] G. C. Jorge, A. Campello, and S. I. R. Costa. q -ary lattices in the l_p norm and a generalization of the Lee metric. In *Workshop on Coding and Cryptography (WCC)*, Bergen, Norway, 2013.
- [9] (Editors) J.P. Buhler, P. Stevenhagen. *Algorithmic Number Theory: Lattices*. Number Fields, Curves and Cryptography, vol. 44, Cambridge University Press.
- [10] J. A. Rush and N. J. A. Sloane. An improvement to the Minkowski-Hlawka bound for packing superballs. *Mathematika*, 34:8–18, 1987.
- [11] Moshe Schwartz. On the non-existence of lattice tilings by quasi-crosses. *European Journal of Combinatorics*, 36(0):130 – 142, 2014.
- [12] J-P. Serre. *A Course in Arithmetic*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 7, Springer, 3 edition, 1996.