

Um estudo sobre equações diferenciais fuchsianas e as relações com as superfícies associadas às tesselações de Farey

Anderson J. Oliveira

Reginaldo Palazzo Jr.*

Departamento de Comunicações, FEEC, UNICAMP,
13083-852, Campinas, SP

E-mail: anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br, palazzo@dt.fee.unicamp.br

RESUMO

Resumo: *As equações diferenciais fuchsianas possuem como principal característica o fato de todo ponto singular no plano complexo estendido ser regular. Casos particulares considerados consistem de três e quatro pontos singulares regulares. Observa-se uma interessante relação entre as singularidades de uma equação diferencial fuchsiana, os vértices de um triângulo fundamental nas tesselações de Farey e a superfície associada à transformação aplicada ao polígono fundamental. Analisando a equação diferencial fuchsiana com três pontos singulares regulares $\{0, 1, \infty\}$ notamos que esses pontos fazem parte de uma região fundamental triangular e que os emparelhamentos das correspondentes arestas (transformações elíptica e parabólica) dão origem a uma superfície esférica. Esses pontos singulares regulares fazem parte da série de Farey \mathbb{F}_1 . Como consequência, temos a relação dos coeficientes da equação diferencial fuchsiana, suas singularidades, o triângulo fundamental e a superfície associada. Nesta direção, propomos generalizar este resultado para outras regiões fundamentais contendo n lados e com os vértices (pontos singulares regulares) fazendo parte da série de Farey \mathbb{F}_{n-2} . Consequentemente, o objetivo será de estabelecer a relação entre os coeficientes da equação fuchsiana contendo n pontos singulares regulares com a superfície associada ao emparelhamento entre os lados dos polígonos fundamentais.*

Palavras-chave: *equações diferenciais fuchsianas, símbolo P-Riemann, transformações de Möebius, tesselações de Farey, superfícies*

1 Equações Diferenciais Fuchsianas

Uma equação diferencial do tipo:

$$y^{(n)}(z) + p_1(z)y^{(n-1)}(z) + \dots + p_{n-1}(z)y'(z) + p_n(z)y(z) = 0,$$

é uma equação de **Fuchs** ou uma equação do tipo **fuchsiano** se todo ponto singular no plano complexo estendido for **regular**, [1], [2], [3].

Para o caso da equação de segunda ordem:

$$y''(z) + p_1(z)y'(z) + p_2(z)y(z) = 0,$$

um ponto singular é dito **regular** se a singularidade em $p_1(z)$ for um pólo simples e em $p_2(z)$ for no máximo um pólo de ordem 2.

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com n pontos singulares é da forma

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0,$$

*Pesquisa com suporte financeiro do CNPq, FAPESP e FAPEMIG

com

$$p(z) = \frac{A_1}{z - \xi_1} + \dots + \frac{A_n}{z - \xi_n} + K_1,$$

e

$$q(z) = \frac{B_1}{(z - \xi_1)^2} + \dots + \frac{C_1}{z - \xi_1} + \dots + \frac{B_n}{(z - \xi_n)^2} + \frac{C_n}{z - \xi_n} + K_2,$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_n &= 2, \\ C_1 + \dots + C_n &= 0, \\ (B_1 + \dots + B_n) + (\xi_1 C_1 + \dots + \xi_n C_n) &= 0, \\ (2\xi_1 B_1 + \dots + 2\xi_n B_n) + (\xi_1^2 C_1 + \dots + \xi_n^2 C_n) &= 0 \end{aligned}$$

Muitas vezes é conveniente levar os pontos singulares para alguns pontos notáveis como por exemplo $z = 0$ ou $z = \infty$. Para isso ser feito, sem perda de generalidade, devemos utilizar uma mudança de variável, como:

$$t = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq bc$$

Uma transformação fracionária linear leva pontos singulares regulares em pontos singulares regulares.

Casos particulares para um, dois, três e quatro pontos singulares regulares podem ser analisados. Para equações diferenciais fuchsianas que possuem três pontos singulares regulares ou mais, o chamado símbolo **P** de Riemann-Papperitz fornece as informações sobre os expoentes característicos dos pontos singulares dessas equações.

$$y = \mathbf{P} \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\}$$

satisfazendo a condição:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Os expoentes característicos dos pontos singulares $0, \infty$ e 1 podem ser expressos em termos do símbolo **P** por:

$$\mathbf{P} \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & z \\ \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\} = \mathbf{P} \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & t \\ \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\}$$

onde z e t estão relacionados pela transformação linear fracionária utilizada.

2 Tesselações de Farey

Seja $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ o semiplano superior com a métrica de Poincaré $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Com essa métrica \mathbb{H}^2 torna-se um modelo de geometria hiperbólica, [4]. O grupo $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ age em \mathbb{H}^2 por transformações de Möebius dadas por: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. A ação dessas transformações estendem para $R \cup \{\infty\}$.

Seja \mathbb{F}_m uma sequência de Farey de ordem m . Então, \mathbb{F}_m consiste de uma série de frações irredutíveis cujo denominador não excede m , ou seja, $\frac{P}{Q}$ com $|P|, |Q| \leq m$ organizados em ordem crescente.

$$\mathbb{F}_1 = \{-\infty, -1, 0, 1, \infty\}$$

$$\mathbb{F}_2 = \{-\infty, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty\}$$

Se para cada valor de m , $m \geq 1$ os termos consecutivos de \mathbb{F}_m são unidos por uma geodésica, a tesselação em \mathbb{H}^2 é chamada tesselação de Farey, como apresentado na Figura 1.

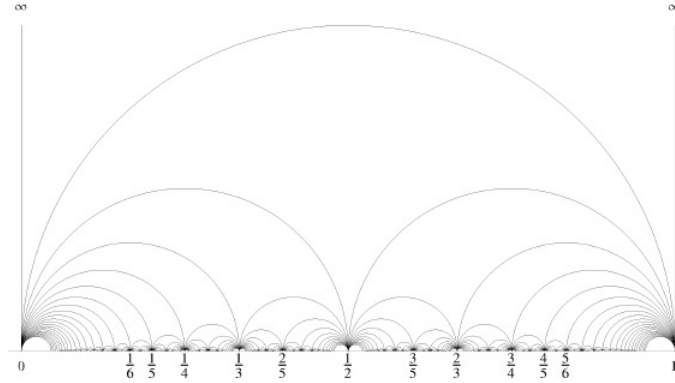


Figura 1: Tesselação de Farey no intervalo $[0,1]$

Como exemplo, considere o triângulo formado pelas geodésicas $C(\gamma(\infty,0))$, $C(\gamma(0,1))$ e $C(\gamma(1,\infty))$, apresentado na Figura 2. Este caso apresenta como singularidades os valores 0, 1 e ∞ .

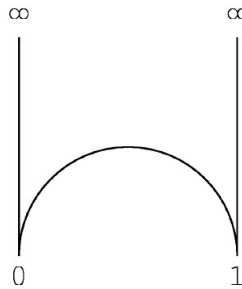


Figura 2: Triângulo Fundamental

3 Equações diferenciais fuchsianas com 3 e 4 pontos singulares regulares associadas à \mathbb{F}_1 \mathbb{F}_2

O objetivo desta seção é apresentar alguns exemplos de equações diferenciais fuchsianas, para os casos com três e quatro pontos singulares regulares e a relação dessas singularidades com as tesselações de Farey, ou seja, uma intersecção entre as equações diferenciais fuchsianas e a geometria hiperbólica. Gostaríamos de chamar a atenção ao fato de que devido à característica da transformação de Möbius ser invariante por homotetia de seus elementos e que as diversas configurações de regiões poligonais associadas às correspondentes superfícies poderem ser consideradas no intervalo $[0, 1]$, implicam na utilização dos elementos da série de Farey como os pontos singulares regulares. Além disso, note na Figura 3 que se as transformações forem hiperbólicas a superfície correspondente é um bitoro conduzindo a uma equação fuchsiana com quatro pontos singulares regulares. Por outro lado se tivermos uma transformação parabólica e uma elíptica então a correspondente superfície será a esfera, conduzindo dessa forma a uma equação fuchsiana com três pontos singulares regulares. Esses dois casos são considerados nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.1 [Três pontos singulares regulares]

Vamos considerar como exemplo a equação de Legendre:

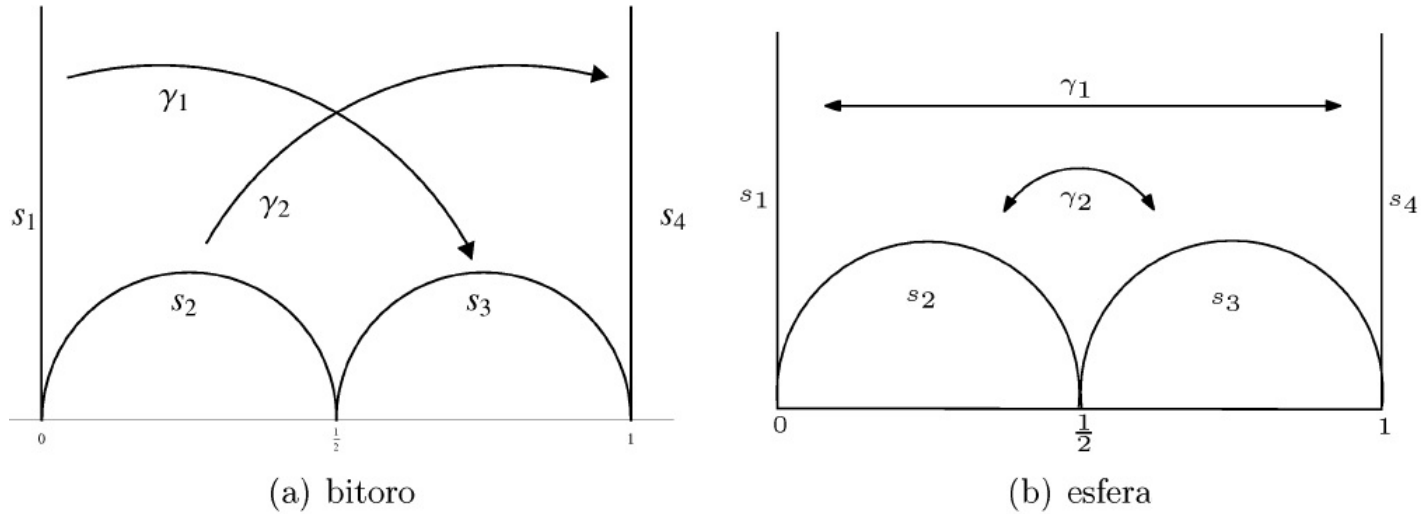


Figura 3: Região quadrangular fundamental

$$(z^2 - 1)y'' + 2zy' - \lambda(\lambda + 1)y = 0.$$

A fim de analisarmos os pólos dessa equação, vamos colocá-la na forma:

$$y''(z) + p_1(z)y'(z) + p_2(z)y(z) = 0.$$

Assim:

$$y'' + \frac{2z}{(z+1)(z-1)}y' - \frac{\lambda(\lambda+1)}{(z+1)(z-1)}y = 0.$$

Observe que temos como pólos os valores -1 e 1 . Os pontos -1 , 1 e ∞ são pontos singulares regulares, uma vez que $(z - z_0)p_1(z)$ e $(z - z_0)^2p_2(z)$ são analíticas em z_0 , onde z_0 representa um ponto singular regular. Além disso, uma característica importante a ser analisada é a de que $p_1(z)$ tem pólos de no máximo ordem 1 e $p_2(z)$ tem pólos de no máximo ordem 2, conforme mencionado em [1].

O próximo passo é fazermos a representação dessa equação diferencial fuchsiana por meio do símbolo P-Riemann. Sabe-se de [3] e [1] que o mesmo apresenta os pontos singulares da equação, bem como os expoentes da equação na singularidade z_0 . Os expoentes são as raízes da equação indicial no ponto singular analisado.

Primeiramente vamos encontrar a equação indicial para cada uma das singularidades e encontrar as raízes das mesmas. O cálculo da equação indicial, bem como suas raízes foram embasados em [2].

- para $z = -1$

$$r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow -1} (z - z_0)p_1(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \frac{2z}{(z + 1)(z - 1)} = 1$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow -1} (z - z_0)^2 p_2(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1)^2 \frac{-\lambda(\lambda + 1)}{(z + 1)(z - 1)} = 0$$

$$r(r - 1) + r = 0$$

$$r = 0$$

- para $z = 1$

$$r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - z_0)p_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{2z}{(z + 1)(z - 1)} = 1$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - z_0)^2 p_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 \frac{-\lambda(\lambda + 1)}{(z + 1)(z - 1)} = 0$$

$$r(r - 1) + r = 0$$

$$r = 0$$

- para ∞

$$r = -\lambda, r = \lambda + 1$$

Para a singularidade no ∞ podemos analisar a função que acompanha y . Desta forma, o símbolo P -Riemann da equação diferencial é:

$$y = \mathbf{P} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & z \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & \end{array} \right\}$$

Analisando a restrição da soma dos expoentes, vemos que:

$$\sum_{i=1}^2 (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = 1$$

Exemplo 3.2 [Quatro pontos singulares regulares]

Considere a equação de Heun, conforme [6]:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z - 1} + \frac{\xi}{z - a} \right] \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z - 1)(z - a)} y = 0.$$

Tomemos como exemplo a seguinte equação, atendendo as características da equação de Heun:

$$y'' + \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z - 1} + \frac{2}{z - 2} \right] y' + \frac{2z - 1}{z(z - 1)(z - 2)} y = 0,$$

$$y'' + \frac{4z^2 - 7z + 2}{z(z - 1)(z - 2)} y' + \frac{2z - 1}{z(z - 1)(z - 2)} y = 0.$$

Observe que para essa equação temos como pontos singulares regulares $z = 0, z = 1, z = 2, z = \infty$. Vamos agora encontrar os expoentes da equação indicial em cada uma das singularidades para obtermos o símbolo P -Riemann da equação:

- para $z = 0$

$$r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 0} (z - z_0)p_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{4z^2 - 7z + 2}{z(z - 1)(z - 2)} = 1$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 0} (z - z_0)^2 p_2(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{2z - 1}{z(z - 1)(z - 2)} = 0$$

$$r(r - 1) + r = 0$$

$$r = 0$$

- para $z = 1$

$$r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - z_0)p_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{4z^2 - 7z + 2}{z(z - 1)(z - 2)} = 1$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - z_0)^2 p_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 \frac{2z - 1}{z(z - 1)(z - 2)} = 0$$

$$r(r - 1) + r = 0$$

$$r = 0$$

- para $z = 2$

$$r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 2} (z - z_0)p_1(z) = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \frac{4z^2 - 7z + 2}{z(z - 1)(z - 2)} = 2$$

$$q_0 = \lim_{z \rightarrow 2} (z - z_0)^2 p_2(z) = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2)^2 \frac{2z - 1}{z(z - 1)(z - 2)} = 0$$

$$r(r - 1) + 2r = 0$$

$$r = 0, r = -1$$

- para ∞

$$r = 1, r = 2$$

corresponde aos valores de α e β da equação geral de Heun.

Desta forma, o símbolo *P*-Riemann da equação diferencial é:

$$y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & 0 & -1 & \end{matrix} \right\}$$

4 Resultados Obtidos

Analisando os pontos singulares regulares das equações diferenciais fuchsianas, em particular, os casos com três e quatro pontos singulares regulares, podemos perceber uma relação com os vértices de um triângulo fundamental de uma tesselação de Farey. A essas tesselações, podem ocorrer transformações elípticas, parabólicas e hiperbólicas e essas transformações geram superfícies, como a esfera, o toro e o bitoro.

Para o caso das transformações elípticas e parabólicas, a superfície associada é a esfera, uma vez que usando a característica de Euler, apresentada em [5]: $\chi = 2 - 2g = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$, onde χ é a característica de Euler, g é o gênero da superfície e σ_k é o número de k -simplex (0-simplex é um vértice, 1-simplex é uma aresta e 2-simplex é um triângulo), encontramos gênero 0, ou seja, a superfície é a esfera.

O próximo passo desse trabalho é estudar a relação dos pontos singulares regulares e as transformações hiperbólicas e consequente superfície associada.

Referências

- [1] Vaz, J., Notas de Aula Métodos de Matemática Aplicada I, IMECC, Unicamp, 2012.
- [2] Nagle, R.; Saff, E.; Snider A. , “Equações Diferenciais”, Pearson, São Paulo, 2012.
- [3] Sotomayor, J., “Lições de Equações Diferenciais Ordinárias”, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [4] Leskow, L; Palazzo Jr. R, “Construction of Hiperbolic Fundamental Regions for Source Coding Applications”, em Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2011.
- [5] A.F.Alves, “Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes”, Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2011.
- [6] Takemura, K. , “Heun’s equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial”, em Mathematics Subject Classification., 2000.