Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Algoritmo para a obtenção de grupos Fuchsianos aritméticos a partir de uma tesselação $\{p, q\}$ e um emparelhamento pré-fixado

Cintya Wink O. Benedito, **Reginaldo Palazzo Jr**,
Departamento de Comunicações, FEEC, Unicamp,
13083-852, Campinas, SP
E-mail: cintyawink@gmail.com, palazzo@dt.fee.unicamp.br.

José Carmelo Interlando
Department of Mathematics and Statistics, San Diego State University
92182-7720, San Diego, CA - USA
E-mail: carmelo.interlando@sdsu.edu

Resumo: *Utilizando conceitos em geometria hiperbólica, álgebra dos quatérnios e grupos Fuchsianos nosso objetivo neste trabalho é fornecer um algoritmo passo a passo para se obter grupos Fuchsianos aritméticos a partir de uma tesselação* $\{p, q\}$ *regular e um emparelhamento pré-fixado.*

Palavras-chave: *Geometria Hiperbólica, Grupos Fuchsianos, Álgebra dos Quatérnios, Ordem dos Quatérnios, Tesselações do Plano Hiperbólico, Constelações de Sinais*

1 Introdução

Neste trabalho temos como objetivo considerar tesselações hiperbólicas $\{p, q\}$ que geram superfícies compactas e orientáveis de gênero $g \geq 2$, onde p e q são funções de g. Além disso, estamos interessados em tesselações $\{p, q\}$ em que seja possível obter um grupo Fuchsiano aritmético Γ_p asssociado, pois este grupo é a estrutura algébrica de nosso interesse para construir constelações de sinais no plano hiperbólico.

Através do Teorema 3.1 que denominamos condição de Fermat, apresentamos uma condição necessária para obter grupos Fuchsianos aritméticos Γ_p associado a uma tesselação hiperbólica $\{p, q\}$. Veremos que um grupo Fuchsiano aritmético pode ser identificado através da forma de seus geradores, pois através destes geradores conseguimos identificar a álgebra e a ordem dos quatérnios associado a este grupo Fuchsiano tornando-o dessa forma aritmético. Sendo assim, na Seção 3 iremos apresentar um algoritmo para obter os geradores de um grupo Fuchsiano aritmético. Este algoritmo é de grande importância pois nem sempre é possível ou fácil de se obter grupos Fuchsianos aritméticos. A implementação deste algoritmo foi feita através do *software Maple* e também pode ser feita utilizando outros tipos de *softwares* como o *Mathematica*, por exemplo.

Para exemplificar o algoritmo proposto, iremos considerar o emparelhamento diametralmente oposto das arestas do polígono regular hiperbólico $\mathcal{P}_p$, neste tipo de emparelhamento toda aresta de $\mathcal{P}_p$ é emparelhada com a sua diametralmente oposta. Este emparelhamento é o mais desejado em codificação quântica topológica, por exemplo, pois a distância nestes códigos é calculada através da distância entre as arestas emparelhadas e neste caso em que todas as arestas são emparelhadas com a sua diametralmente oposta, temos que este será o caminho homologicamente não trivial com a maior distância mínima possível. Como consequência, o código resultante apresenta uma capacidade de correção de erros maior dentre todos os códigos oriundos dos demais emparelhamentos, [6].

2 Álgebra dos quatérnios e grupos Fuchsianos aritméticos

Existem várias formas distintas de construir o plano hiperbólico, neste trabalho vamos considerar dois modelos euclidianos para a geometria hiperbólica plana, o semi-plano superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ conhecido como *plano de Lobachevski* e, o disco unitário $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ chamado de *disco de Poincaré*.

Uma *tesselação regular* no plano hiperbólico é uma partição deste plano por polígonos regulares não sobrepostos, todos congruentes, sujeitos à restrição de se interceptarem somente em suas arestas ou vértices, de modo a termos o mesmo número de polígonos partilhando um mesmo vértice, independente do vértice. Se os polígonos de uma tesselação contém p lados, onde cada vértice é o encontro de q desses polígonos, então a tesselação será denotada por $\{p, q\}$. Em particular, se $p = q$, então a tesselação é chamada *auto dual*.

Um grupo Γ é chamado *grupo fuchsiano* se é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$. Os grupos fuchsianos que iremos considerar são os grupos fuchsianos derivados de uma álgebra dos quatérnios, conhecidos como *grupos fuchsianos aritméticos*.

Uma *álgebra dos quatérnios* $\mathcal{A} = (\alpha, \beta)_{\mathbb{K}}$ sobre um corpo de números $\mathbb{K}$ é uma álgebra simples central de dimensão 4 sobre $\mathbb{K}$, com uma base $\{1, i, j, k\}$, satisfazendo a condição de que $i^2 = \alpha,\ j^2 = \beta,\ k = ij = -ji$ e que $k^2 = -\alpha\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}/\{0\}$.

Agora, consideremos $\mathcal{A}$ uma álgebra dos quatérnios sobre $\mathbb{K}$ e R um anel de $\mathbb{K}$. Então, uma *R-ordem* $\mathcal{O}$ em $\mathcal{A}$ é um subanel com unidade de $\mathcal{A}$ que é um R-módulo finitamente gerado tal que $\mathcal{A} = \mathbb{K}\mathcal{O}$. Assim, sendo $\mathcal{A} = (\alpha, \beta)_{\mathbb{K}}$ e $I_{\mathbb{K}}$ o anel dos inteiros de $\mathbb{K}$, onde $\alpha, \beta \in I_{\mathbb{K}}$, então $\mathcal{O} = \{\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I_{\mathbb{K}}\}$, é uma ordem em $\mathcal{A}$ denotada por $\mathcal{O} = (\alpha, \beta)_{I_{\mathbb{K}}}$. Também chamaremos uma R-ordem $\mathcal{O}$ de *reticulado hiperbólico*, devido a sua identificação com grupos fuchsianos aritméticos.

Pode-se provar que o grupo derivado de uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (\alpha, \beta)_{\mathbb{K}}$, cuja ordem é $\mathcal{O} = (\alpha, \beta)_{I_{\mathbb{K}}}$, denotado por $\Gamma[\mathcal{A}, \mathcal{O}]$ é isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$ e portanto, é um grupo fuchsiano chamado de *grupo fuchsiano aritmético*.

3 Algoritmo para a obtenção de grupos Fuchsianos aritméticos

A partir de alguns conceitos em geometria hiperbólica, álgebra dos quatérnios e grupos Fuchsianos nosso objetivo é fornecer um algoritmo passo a passo para se obter grupos Fuchsianos aritméticos a partir de uma tesselação $\{p, q\}$ regular e um emparelhamento fixado. Para que este algoritmo seja eficiente precisamos que algumas condições sejam satisfeitas. Estas condições serão fundamentadas em alguns resultados que iremos apresentar a seguir.

Dado p e q provenientes de uma tesselação regular $\{p, q\}$ precisamos verificar que p e q satisfazem a condição de Fermat estabelecida no seguinte Teorema.

Teorema 3.1. *[3]* **(Condição de Fermat)** *Seja Γ_p um grupo Fuchsiano proveniente de uma tesselação $\{p, q\}$. Então é possível encontrar os geradores de $\Gamma \simeq \Gamma_p$ e, portanto, o grupo Fuchsiano aritmético, se p e q puderem ser decompostos na forma:*

$$2^k p_1 p_2 \dots p_s, \tag{1}$$

onde k é um inteiro não negativo e os p_i's são primos distintos de Fermat.

As transformações que fazem o emparelhamento das arestas do polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}_p$ associado à tesselação $\{p, q\}$ devem ser hiperbólicas, pois estamos interessados em tesselações que geram superfícies compactas (de Riemann) de gênero $g \geq 2$. Esta condição pode ser garantida através dos seguintes resultados.

Teorema 3.2. *[5] Cada elemento (transformação) de um grupo Fuchsiano que gera uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ consiste somente da identidade e de elementos hiperbólicos.*

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0179

Teorema 3.3. *[5] Sejam T_A uma transformação de Möbius real que não é a identidade e $Tr(A)$ o traço da matriz A associada a T_A. Então*

i) *T_A é parabólica $\Leftrightarrow$ T_A tem somente um ponto fixo em $\partial\mathbb{H} \Leftrightarrow Tr(A)^2 = 4$;*

ii) *T_A é elíptica $\Leftrightarrow$ T_A tem somente um ponto fixo em $\mathbb{H} \Leftrightarrow Tr(A)^2 < 4$;*

ii) *T_A é hiperbólica $\Leftrightarrow$ T_A tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{H} \Leftrightarrow Tr(A)^2 > 4$.*

A ação do grupo Γ_p em $\mathbb{D}$ pode se processar pela identificação das arestas de um polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}_p$ de p arestas em $\mathbb{D}$ por isometrias que geram Γ_p, ou seja, pelas transformações de emparelhamentos que como vimos devem ser hiperbólicas. Além disso, para gerar o grupo Fuchsiano Γ_p, estas transformações devem satisfazer as condições de Poincaré de lados e ângulos mostradas nos próximos resultados.

Teorema 3.4. *[2] Seja $\mathcal{P}_p$ um domínio de Dirichlet de Γ_p. Sejam $v_1, \cdots, v_t$ os vértices de um ciclo e $\theta_1, \cdots, \theta_t$ os ângulos internos nos respectivos vértices. Se m denota a ordem do estabilizador em Γ_p de um dos vértices do ciclo então $\theta_1 + \cdots + \theta_t = \frac{2\pi}{m}$.*

Como os grupos Fuchsianos Γ_p que iremos considerar não possuem elementos elípticos, então estamos restritos ao caso em que $m = 1$ (um dos vértices do ciclo não é ponto fixo) e portanto,

$$\theta_1 + \cdots + \theta_t = 2\pi.$$

Como cada vértice de $\mathcal{P}_p$ é recoberto por q desses polígonos, temos que os ângulos internos nos respectivos vértices valem $\frac{2\pi}{q}$. Assim, pelo Teorema 3.4, cada ciclo deve conter exatamente q vértices (o número de vértices de um ciclo é chamado de comprimento do ciclo) e a quantidade de ciclos em uma tesselação $\{p, q\}$ será $\frac{p}{q}$, de modo que q deve dividir p.

Teorema 3.5. *[2] Seja $\mathcal{P}_p$ um domínio de Dirichlet de Γ_p. Considere o conjunto $\{T_i : t_i \in \Gamma_p\}$ de elementos de Γ_p que identificam arestas distintas de $\mathcal{P}_p$. Então $\{T_i : t_i \in \Gamma_p\}$ forma um conjunto de geradores de Γ_p que satisfazem um conjunto de relações para cada ciclo ε de vértices.*

Através dos Teoremas 3.4 e 3.5 temos que o grupo Fuchsiano Γ_p tem a seguinte representação

$$\Gamma_p = \{T_1, \cdots, T_t \in \mathbb{D} : T_\varepsilon = Id_2\},$$

onde T_ε representa o conjunto de relações entre as transformações que pertencem ao ciclo ε e como vimos a quantidade de ciclos de uma tesselação $\{p, q\}$ é $\frac{p}{q}$. O conjunto de relações entre as transformações contidas em cada ciclo de vértices ε depende do tipo de emparelhamento utilizado.

Sabemos que um grupo Fuchsiano aritmético $\Gamma[\mathcal{A}, \mathcal{O}]$ é um grupo Fuchsiano Γ_p associado a uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ e uma ordem dos quatérnios $\mathcal{O}$ e que nem sempre é possível obter esta associação, ou seja, nem sempre é possível obter um grupo Fuchsiano aritmético. Através da condição de Fermat obtemos uma condição necessária. Para conseguirmos identificar qual é a álgebra e a ordem dos quatérnios associada, quando possível, precisamos que os geradores do grupo Γ estejam da forma apresentada no resultado abaixo.

Proposição 3.1. *[4] Seja Γ um grupo Fuchsiano aritmético finitamente gerado por $G_1, \cdots, G_t$ com*

$$G_i = \begin{pmatrix} x_i + y_i\sqrt{\theta} & z_i + w_i\sqrt{\theta} \\ -z_i + w_i\sqrt{\theta} & x_i - y_i\sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \ i = 1, \cdots, t, \tag{2}$$

onde $G_i \in M(2, \mathbb{K}(\sqrt{\theta}))$ e $\theta, x_i, y_i, z_i, w_i \in \mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K}$ um corpo de números totalmente real. Então qualquer elemento $T \in \Gamma$ assume a mesma forma dos geradores de Γ.

Se os geradores forem apresentados na forma dada em (2), dizemos que o grupo Fuchsiano $\Gamma \simeq \Gamma_p$ é associado a álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{K}}$ e ordem dos quatérnios $\mathcal{O} = (\theta, -1)_{I_{\mathbb{K}}}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta_1)$ com $\mathbb{Q}(\theta_1) \supseteq \mathbb{Q}(\theta)$ é um corpo de números algébricos e $I_{\mathbb{K}}$ é o seu anel dos inteiros e, portanto, Γ_p é um grupo Fuchsiano aritmético.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0179

3.1 Algortimo

Agora, munido dos resultados apresentados acima, estamos em condições de construir o algoritmo que será estruturado da seguinte forma:

Algoritmo: *Sejam $\{p,q\}$ uma tesselação regular e $\mathcal{P}_p$ o polígono regular hiperbólico associado a esta tesselação com um emparelhamento de arestas pré-fixado. Fornecendo como entrada os valores de p e q este algoritmo fornecerá como saída uma representação dos geradores G_i's para o grupo Fuchsiano aritmético $\Gamma \simeq \Gamma_p$ diretamente ou parcialmente (neste caso podendo ser facilmente encontrado) na forma dada em (2). Dessa forma, podendo ser associado a álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{K}}$, a ordem dos quatérnios $\mathcal{O} = (\theta, -1)_{\mathcal{I}_{\mathbb{K}}}$ e também identificamos o corpo de números $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta_1)$, onde $\mathbb{Q}(\theta_1) \supseteq \mathbb{Q}(\theta)$.*

1. **[Entrada]** $p, q \geq 2$
   Como estamos interessados em tesselações hiperbólicas que geram superfícies de gênero $g \geq 2$ e os valores de p e q são funções de g, temos que p e q devem ser números inteiros positivos maiores ou iguais a 2 e pertencerem a uma teselação que gera uma superfície de gênero $g \geq 2$.

2. **[Verificar condição de Fermat]**
   Decompor p e q em fatores primos. Verificar se esta decomposição satisfaz a condição de Fermat, ou seja, se a decomposição for da forma

   $$p = 2^j p_1 \cdots p_r \quad \text{e} \quad q = 2^k q_1 \cdots q_s,$$

   com j, k inteiros não negativos e p_i's e q_i's primos distintos de Fermat. Caso contrário, finalizar o algoritmo.

3. **[Computar matriz A_1]**
   Como pré-fixamos o emparelhamento diametralmente oposto, temos que o cálculo da matriz A_1 neste caso é dado da seguinte forma:

   $$A_1 = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{2\cos\frac{\pi}{q}}{2\sin\frac{\pi}{p}} & \dfrac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} + 2\cos\frac{\pi}{q}} \cdot e^{i\left(\frac{p+1}{p}\right)\pi}}{2\sin\frac{\pi}{p}} \\ \dfrac{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{p} + 2\cos\frac{\pi}{q}} \cdot e^{-i\left(\frac{p+1}{p}\right)\pi}}{2\sin\frac{\pi}{p}} & \dfrac{2\cos\frac{\pi}{q}}{2\sin\frac{\pi}{p}} \end{array} \right).$$

   Observamos que esta matriz pode ser utilizada em qualquer emparelhamento que tenha ao menos uma aresta emparelhada com sua diametralmente oposta. E qualquer que seja o emparelhamento utilizado, sempre é possível obter a matriz A_1 associada a transformação T_1 através de relações trigonométricas e de congruência entre ângulos e as arestas do polígono fundamental $\mathcal{P}_p$.

4. **[Computar matriz C e sua inversa C^{-1}]**
   Considerando T_C uma transformação elíptica de ordem p, a matriz associada a esta transformação e que queremos computar é dada por

   $$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{p}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{p}} \end{pmatrix}.$$

   Como $C \in M(2, \mathbb{K})$ temos que C possui inversa C^{-1} que pode ser facilmente calculada.

5. **[Computar demais matrizes de transformações A_i's, com $i = 2, \cdots, \frac{p}{2}$]**
   Conhecendo uma transformação que faz o emparelhamento de arestas de $\mathcal{P}_p$, obtida na

Etapa 3., as demais transformações podem ser obtidos como conjugações elípticas desta utilizando as matrizes C e C^{-1} obtidas na Etapa 4.

Neste caso em que pré-fixamos o emparelhamento diametralmente oposto estas matrizes serão obtidas da seguinte forma:

$$\text{Para } i = 2, \cdots, \tfrac{p}{2} \text{ calcular } A_i = C^{i-1} A_1 C^{-(i-1)}.$$

6. **[Verificar condição de hiperbolicidade]**
Nesta etapa iremos checar se todas as transformações obtidas nas Etapas 3. e 5. são de fato hiperbólicas. Isto será feito através do cálculo da função traço destas matrizes da seguinte forma:

$$\text{Para } i = 1, \cdots, \tfrac{p}{2} \text{ calcular } t_i = Tr^2(A_i).$$

Queremos que $t_i > 4$ para todo $i = 1, \cdots, \frac{p}{2}$ para que as transformações associadas a estas matrizes sejam hiperbólicas. Caso $t_i \leq 4$ para algum i, finalizar o algoritmo.

7. **[Verificar condição de Poincaré]**
Dado um conjunto de relações em um ciclo de vértices as quais são obtidas de acordo com o emparelhamento utilizado, precisamos verificar que este conjunto de relações, com respeito a operação composição, nos fornece a função identidade. Para a tesselação $\{p, q\}$ com apenas um ciclo de vértices, como por exemplo as auto-duais e, fixado o emparelhamento diametralmente oposto, este conjunto de relações é dado da seguinte forma:

$$T_1 \circ T_2^{-1} \circ \cdots \circ T_{\frac{p}{2}-1} \circ T_{\frac{p}{2}}^{-1} \circ T_1^{-1} \circ T_2 \circ \cdots \circ T_{\frac{p}{2}-1}^{-1} \circ T_{\frac{p}{2}}.$$

Assim, considerando as matrizes obtidas nas Etapas 3. e 5. devemos verificar se

$$A_1 \circ A_2^{-1} \circ \cdots \circ A_{\frac{p}{2}-1} \circ A_{\frac{p}{2}}^{-1} \circ A_1^{-1} \circ A_2 \circ \cdots \circ A_{\frac{p}{2}-1}^{-1} \circ A_{\frac{p}{2}} = Id_2,$$

onde $Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.

8. **[Definir função f como matriz e computar sua inversa f^{-1} como matriz]**
A função $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$ dada por $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ nos permite passar as transformações obtidas em $\mathbb{H}^2$ para $\mathbb{D}^2$ e vice-versa. Sendo assim, definimos:

$$F = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

e calculamos sua inversa F^{-1}, pois $F \in M(2, \mathbb{C})$.

9. **[Saída: Computar matrizes G_i's, com $i = 1, \cdots, \frac{p}{2}$]**
As matrizes obtidas nas Etapas 3. e 5. associadas às transformações de emparelhamentos T_i's, para $i = 1, \cdots, \frac{p}{2}$, nos fornecem um conjunto de geradores para o grupo Fuchsiano Γ_p estão em $\mathbb{D}^2$ mas os geradores que aparecem na forma (2) para um grupo Fuchsiano Γ estão em $\mathbb{H}^2$. Utilizando a função f e sua inversa obtidas na Etapa 8. podemos levar os geradores de Γ_p em $\mathbb{D}^2$ nos geradores de Γ em $\mathbb{H}^2$ tal que $\Gamma_p \simeq \Gamma$. Este isomorfismo é dado da seguinte forma:
$$\phi(T) = fTf^{-1},$$
onde $\phi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$. Assim, para $i = 1, \cdots, \frac{p}{2}$ calculamos:
$$G_i = FA_iF^{-1}.$$

■

4 Exemplo para a tesselação $\{4g, 4g\}$

A tesselação hiperbólica que iremos utilizar neste trabalho para exemplificar o algoritmo será a tesselação auto-dual $\{4g, 4g\}$. Para esta tesselação é possível, utilizando o algoritmo proposto, obter grupos Fuchsianos aritméticos para diversos valores de g, que satisfaçam a condição de Fermat. E, apesar desta tesselação não ter uma boa densidade de empacotamento, ela apresenta uma baixa complexidade computacional devido a sua auto dualidade. Outras tesselações hiperbólicas que geram superfícies de gênero $g \geq 2$ e que possuem uma melhor densidade de empacotamento como as tesselações $\{4g+2, 2g+1\}$, $\{8g-4, 4\}$ e $\{12g-6, 3\}$, também podem ser consideradas.

Consideremos $u_1, u_2, \ldots, u_{4g-1}, u_{4g}$ as arestas de P_{4g} dispostas em ordem cíclica fixa no sentido anti-horário e as isometrias para este emparelhamento $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_{2g}^*$ tais que

$$T_i^*(u_i) = u_{i+2g}, \quad i = 1, \ldots, 2g. \tag{3}$$

Por meio desses emparelhamentos, obtemos uma superfície compacta e orientável $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}^*$ de gênero g. Considerando T_C a transformação elíptica de ordem $4g$ tal que

$$T_C(u_1) = u_2 \quad \text{e} \quad T_{C^{r_i}}(u_1) \in \{u_i,\ i = 2, \ldots, 4g\}, \tag{4}$$

onde r_i é a potência de T_C, podemos escrever as demais transformações como conjugações de T_1^* por meio de potências de C. Sejam A_i^* as matrizes correspondentes as transformações T_i^*, com $i = 1, \ldots, 2g$. Assim, segue de (3) e (4) que

$$A_i^* = C^{i-1} A_1^* C^{-(i-1)},\ i = 2, \ldots, 2g. \tag{5}$$

A estrutura algébrica deste grupo é dada através da seguinte representação

$$\Gamma_{4g}^* = \langle T_1^*, \ldots, T_{2g}^* \ :\ T_1^* \circ (T_2^*)^{-1} \circ \cdots \circ T_{2g-1}^* \circ (T_{2g}^*)^{-1} \circ (T_1^*)^{-1} \circ T_2^* \circ \cdots \circ (T_{2g-1}^*)^{-1} \circ T_{2g}^* = Id \rangle.$$

Seja $\mathcal{P}_8$ o polígono regular hiperbólico associado a tesselação $\{8, 8\}$ e consideremos o emparelhamento diametralmente oposto das arestas de $\mathcal{P}_8$. Utilizando o algoritmo proposto obtemos os seguintes geradores do grupo Fuchsiano Γ_8^*:

$$\begin{array}{rcl} G_1^* = & \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{-w_1 \sqrt[4]{2}}{2} \\ \frac{-w_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{2}}{2} \end{pmatrix}, & G_2^* = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - w_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{y_1 \sqrt[4]{2}}{2} \\ \frac{y_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{x_1 + w_1 \sqrt[4]{2}}{2} \end{pmatrix}, \\ = & \varphi(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2} i - \frac{w_1}{2} k) & = \varphi(\frac{x_1}{2} - \frac{w_1}{2} i + \frac{y_1}{2} k) \\ G_3^* = & \begin{pmatrix} \frac{x_1 - w_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{-y_1 \sqrt[4]{2}}{2} \\ \frac{-y_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{x_1 + w_1 \sqrt[4]{2}}{2} \end{pmatrix}, & G_4^* = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{-w_1 \sqrt[4]{2}}{2} \\ \frac{-w_1 \sqrt[4]{2}}{2} & \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{2}}{2} \end{pmatrix}, \\ = & \varphi(\frac{x_1}{2} - \frac{w_1}{2} i - \frac{y_1}{2} k) & = \varphi(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} i - \frac{w_1}{2} k) \end{array}$$

onde $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}, y_1 = \sqrt{2}$ e $w_1 = 2 + \sqrt{2}$. Logo, a ordem dos quatérnios associada ao grupo Fuchsiano Γ_8^* derivado da álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (\sqrt{2}, -1)_{\mathbb{K}}$, será $\mathcal{O} = (\sqrt{2}, -1)_R$, onde $R = \mathcal{I}_{\mathbb{K}}$ e $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 2$.

Agora, sejam $g = 4$ e a tesselação $\{16, 16\}$ considerando novamente o emparelhamento diametralmente oposto das arestas do polígono $\mathcal{P}_{16}$. Utilizando o algoritmo proposto obtemos os seguintes geradores para o grupo fuchsiano Γ_{16}^*:

$$\begin{array}{rcl} G_1^* = & \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{-w_1 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-w_1 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, & G_2^* = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_2 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{-w_2 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-w_2 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1 - y_2 \sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, \\ = & \varphi(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2} i - \frac{w_1}{2} k) & = \varphi(\frac{x_1}{2} + \frac{y_2}{2} i - \frac{w_2}{2} k) \end{array}$$

$$\begin{aligned} G_3^* &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{-y_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-y_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1-w_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, & G_4^* &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{-y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1-w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \varphi(\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{w_2}{2}i-\tfrac{y_2}{2}k) & &= \varphi(\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{w_1}{2}i-\tfrac{y_1}{2}k) \\ G_5^* &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1-w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, & G_6^* &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{y_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{y_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1-w_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \varphi(\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{w_1}{2}i+\tfrac{y_1}{2}k) & &= \varphi(\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{w_2}{2}i+\tfrac{y_2}{2}k) \\ G_7^* &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{w_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{w_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1-y_2\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, & G_8^* &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1-y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \varphi(\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{y_2}{2}i+\tfrac{w_2}{2}k) & &= \varphi(\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{y_1}{2}i+\tfrac{w_1}{2}k) \end{aligned}$$

onde $x_1 = 2+2\sqrt{2}(1+\sqrt{2+\sqrt{2}})$, $y_1 = \sqrt{2}$, $w_1 = 2+\sqrt{2}+2\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $y_2 = \sqrt{2}(1+\sqrt{2+\sqrt{2}})$, $w_2 = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Assim, temos que a ordem associada ao grupo fuchsiano Γ_{16}^* é $\mathcal{O} = (\sqrt{2+\sqrt{2}}, -1))_R$, sendo $R = \mathcal{I}_{\mathbb{K}}$. E, Γ_{16}^* é um grupo fuchsiano derivado da álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (\sqrt{2+\sqrt{2}}, -1)_{\mathbb{K}}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ e $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 4$.

Da mesma forma como mostrada para as tesselações $\{8, 8\}$ e $\{16, 16\}$, outros grupos Fuchsianos aritméticos associados à tesselações hiperbólicas podem ser obtidos utilizando o algoritmo proposto.

Referências

[1] S. Katok, "Fuchsian Groups", The University of Chicago Press, Chicago, 1992.

[2] J. Stillwell, "Geometry of Surfaces", Springer-Verlag, 2000.

[3] C.W.O. Benedito, R. Palazzo,Jr. *A necessary condition for obtaining arithetic Fuchsian groups derived from quaternion orders.* Program and abstracts of XXII Brazilian Algebra Meeting, Salvador: UFBA, p.71, 2012.

[4] V.L. Vieira, "Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos q Quatérnios para a Construção de Constelações de Sinais", Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2007.

[5] M. Faria. *Coordenadas Fricke e Empacotamento Hiperbólico de Discos.* Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2005.

[6] C. D. de Albuquerque. *Análise e Construção de Códigos Quânticos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais.* Tese de Doutorado, FEEC e Computação, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2009.

