

Cinemática Posicional de Robôs via Iteração e Quatérnios

Luiz A. Radavelli , **Daniel Martins**

Depto de Engenharia Mecânica, Laboratório de Robótica, UFSC,
Campus Trindade
88040-900, Florianópolis, SC
E-mail: luiz.radavelli@ufsc.br, daniel@emc.ufsc.br,

Edson R. De Pieri

Depto de Engenharia de Automação, UFSC
Campus Trindade
88040-900, Florianópolis, SC
E-mail: edopieri@das.ufsc.br,

Roberto Simoni

Depto de Engenharia da Mobilidade, UFSC
Campus Joinville
89218-000, Joinville, SC
E-mail: roberto.simoni@ufsc.br.

Resumo: *Este trabalho resolve a cinemática posicional de robôs manipuladores utilizando um método iterativo proveniente da álgebra dos quatérnios e das convenções do método de Denavit-Hartenberg. Serão explicadas as condições necessárias para que as rotações sejam executadas por uma multiplicação simples de quatérnios ao invés do modo mais conhecido que utiliza uma multiplicação conjugada. O método iterativo apresentado utilizará a multiplicação simples de quatérnios, dependendo, portanto, menos operações que as abordagens tradicionais.*

Palavras-chave: *Quatérnios, Rotações, Cinemática, Iteração*

1 Introdução

A cinemática posicional de robôs estuda a posição e orientação de robôs, relacionando os parâmetros das juntas atuadas com a posição e orientação do efetuador, abreviado por postura do efetuador. Os parâmetros das juntas atuadas são os ângulos de rotação e distâncias de translação das juntas. A cinemática posicional é dividida em dois subproblemas: cinemática direta, onde os parâmetros das juntas ativas são dados e estuda-se a postura do efetuador; e cinemática inversa, onde a postura do efetuador é conhecida e o problema consiste em determinar os parâmetros das juntas atuadas para que se obtenha tal postura.

Tradicionalmente, a cinemática posicional é obtida pelo método de Denavit-Hartenberg [12], mas a utilização de quatérnios e quatérnios duais neste contexto vem crescendo ao longo das últimas cinco décadas. As definições, operações e propriedades das álgebras dos quatérnios e dos quatérnios duais surgem de uma álgebra mais geral, a álgebra de *Clifford* [9].

Um dos primeiros trabalhos incluindo quatérnios na cinemática é atribuído a *Yang e Freudenstein* [17]. Depois dele vários trabalhos surgiram utilizando quatérnios e quatérnios duais. Na cinemática inversa [2], no problema das singularidades [14], na computação gráfica [13] e teoria de curvas [7], no planejamento de trajetória [4, 3], dinâmica [15]. Em [1] observam-se

comparações entre métodos matriciais e quaternianos para resolver a cinemática posicional de robôs. Considerações computacionais relacionadas à utilização de quatérnios podem ser vistas em [10, 11]. Para o estudo da cinemática posicional sugerimos [12]; para quatérnios [5, 8, 6] e [9].

Baseando-se nas leituras citadas, principalmente em [1, 10, 9], desenvolvemos a cinemática posicional de robôs utilizando a álgebra dos quatérnios e as convenções do método de Denavit-Hartenberg. Com os parâmetros de DH são definidos os operadores quatérnios de rotação que, por sua vez, resolvem a cinemática utilizando-se de um modelo computacional iterativo.

Para isto, o trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 são apresentados a álgebra dos quatérnios e o operador quatérnio de rotação. Ainda nesta seção são apresentadas uma correspondência matricial com os quatérnios que facilita a implementação da álgebra dos quatérnios, e uma forma mais econômica para as rotações. Na Seção 3 o método proposto é detalhado. Para exemplificar a aplicabilidade do método dois exemplos simples são apresentados. A Seção 4 foi reservada para algumas considerações finais.

2 Álgebra dos Quatérnios e as Rotações

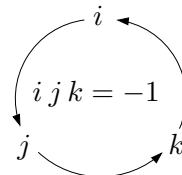
Os quatérnios são elementos formados pela soma de escalares com vetores tridimensionais, aludindo-se à relação *tempo* × *espaço*. A parcela escalar de um quatérnio pode ser pensada como o eixo do tempo enquanto que a parcela vetorial, o espaço tridimensional [16]. O conjunto dos quatérnios encorpado de duas operações, adição e multiplicação, forma uma álgebra associativa, não comutativa, sem divisores de zero, denotada por \mathbb{H} , e que contém as álgebras \mathbb{R} e \mathbb{C} .

Os quatérnios ganharam forma com Sir *William Rowan Hamilton* em 16 de outubro de 1843, quando ele descobrira a resposta para o problema que o atormentava: $i j = k$. Um quatérnio é um elemento abstrato que relaciona o tempo e o espaço, dado por

$$q = w + x i + y j + z k = w + \mathbf{v},$$

onde $w \in \mathbb{R}$ representa o eixo escalar, correspondente ao tempo, e $\mathbf{v} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ representa o espaço. i, j, k são as unidades quaternianas valendo-se das propriedades

$$i^2 = j^2 = k^2 = i j k = -1.$$



$Sc(q) := w$ é dita a parte escalar (real) e $Ve(q) := \mathbf{v}$ a parte vetorial (imaginária) do quatérnio q . Se $\mathbf{v} = 0$, então $q = w$ é dito *quatérnio real*, enquanto que se $w = 0$, então $q = \mathbf{v}$ é dito *quatérnio puro*. Neste caso o quatérnio corresponde aos vetores de \mathbb{R}^3 . Observe que pelas propriedades supracitadas decorre que $i j = k, j k = i, k i = j, j i = -k, k j = -i$ e $i k = -j$.

Uma forma conveniente de representar um quatérnio é dada observando-se que um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ pode ser associado a um elemento de \mathbb{R}^4 , de modo que cria-se o seguinte mapeamento bijetivo:

$$q = w + x i + y j + z k \in \mathbb{H} \longleftrightarrow q = [w \ x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^4.$$

Além disso, a aplicação $\psi : \mathbb{H} \mapsto M_4(\mathbb{R})$ definida por

$$\psi(w + x i + y j + z k) = \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ -x & w & -z & y \\ -y & z & w & -x \\ -z & -y & x & w \end{bmatrix} := [q]_{\mathbb{R}} \tag{1}$$

é um homomorfismo injetivo entre \mathbb{H} e $M_4(\mathbb{R})$. Com essa representação e a definição da multiplicação de \mathbb{H} (seção 2) fica fácil implementar a álgebra dos quatérnios.

2.1 Álgebra dos Quatérnios

Considere w_k, x_k, y_k, z_k números reais, $k = 1, 2$. Para os quatérnios

$$\begin{aligned} q_1 &= w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k = w_1 + \mathbf{v}_1, \\ q_2 &= w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k = w_2 + \mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

a álgebra dos quatérnios é estabelecida mediante as seguintes definições:

1. Igualdade: $q_1 = q_2 \Leftrightarrow w_1 = w_2, x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.
2. Adição: $q_1 \pm q_2 = (w \pm w_2) + (\mathbf{v} \pm \mathbf{v}_2)$.
3. Multiplicação por escalar: $c q_1 = c w + c \mathbf{v}, \quad \forall c \in \mathbb{R}$.
4. Multiplicação:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k)(w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k) \\ &= w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \\ &\quad + (x_1 w_2 + w_1 x_2 - z_1 y_2 + y_1 z_2) i \\ &\quad + (y_1 w_2 + z_1 x_2 + w_1 y_2 - x_1 z_2) j \\ &\quad + (z_1 w_2 - y_1 x_2 + x_1 y_2 + w_1 z_2) k. \end{aligned}$$

Computacionalmente, a multiplicação entre quatérnios pode ser definida utilizando-se o homomorfismo em (1). A saber, $q_1 q_2 = [q_1]_{\mathbb{R}} [q_2]_{\mathbb{R}}$ ou, também, $q_1 q_2 = [q_1]_{\mathbb{R}} q_2^*$. Não obstante, analisando-se os termos da multiplicação de quatérnios estabelece-se a forma vetorial, útil nos desenvolvimentos teóricos,

$$q_1 q_2 = w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

Em particular, para quatérnios puros, $w_1 = w_2 = 0$ e

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \tag{2}$$

estabelece a relação entre o produto de quatérnios com os produtos interno e externo usuais de \mathbb{R}^3 . Ainda para quatérnios puros,

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 = -2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2), \tag{3}$$

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 = 2(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2). \tag{4}$$

5. Conjugado: $q^* = w - \mathbf{v}$.
6. Norma: $\|q\|^2 = q q^* = q^* q = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}$. Um quatérnio é dito unitário se $\|q\| = 1$.
7. Inverso: $q q^{-1} = q^{-1} q = 1_{\mathbb{H}} \Leftrightarrow q^* q q^{-1} = q^* \Leftrightarrow \|q\|^2 q^{-1} = q^* \Leftrightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$.

2.2 Rotações por Quatérnios

O grupo dos quatérnios unitários

$$\text{HU}(1) = \{q \in \mathbb{H}; \|q\| = 1\}$$

constitui o conjunto dos quatérnios responsáveis por executar rotações em \mathbb{R}^3 . De fato,

$$q \in \text{HU}(1) \iff q = \cos \frac{\theta}{2} + \left(\text{sen} \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{s}$$

onde $\mathbf{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ é o vetor unitário que representa o eixo de rotação e θ a magnitude da rotação. Se $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ é codificado como um quatérnio puro, isto é, $\xi = 0 + \mathbf{r}$, então a rotação de \mathbf{r} é dada pela multiplicação conjugada

$$\xi' = q \xi q^*.$$

Contudo, a rotação de \mathbf{r} altera somente a componente de \mathbf{r} que é perpendicular a \mathbf{s} – veja a Figura 1. Em termos das componentes,

$$\begin{aligned} q \mathbf{r}_{\parallel} q^* &= \mathbf{r}_{\parallel}, \\ q \mathbf{r}_{\perp} q^* &= q^2 \mathbf{r}_{\perp}. \end{aligned}$$

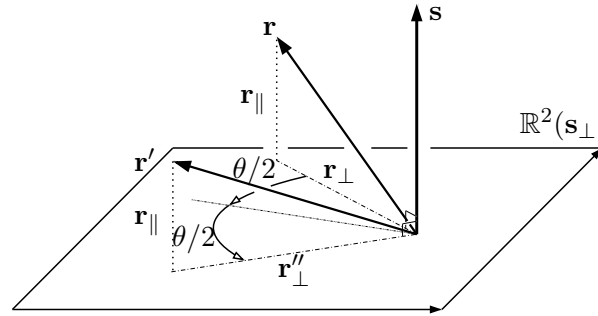


Figura 1: Ação da rotação de um vetor \mathbf{r} via quatérnios.

Portanto, para $\mathbf{r} \perp \mathbf{s}$, a rotação via quatérnios pode ser estabelecida pela multiplicação simples

$$\xi' = q \xi, \quad \xi = 0 + \mathbf{r}. \tag{5}$$

Porém neste caso o quatérnio responsável pela rotação é definido por

$$q = \cos \theta + (\text{sen } \theta) \mathbf{s}. \tag{6}$$

De fato, se $\mathbf{r} \perp \mathbf{s}$, então $\xi' = q \xi q^* = q (0 + \mathbf{r}_{\perp}) q^* = q^2 (0 + \mathbf{r}_{\perp})$, em que

$$q^2 = \left[\cos \frac{\theta}{2} + \left(\text{sen } \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{s} \right] \left[\cos \frac{\theta}{2} + \left(\text{sen } \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{s} \right] = \cos \theta + (\text{sen } \theta) \mathbf{s}.$$

Observe que, conforme a Equação (2), $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}\mathbf{s} = -1$.

O método proposto contempla a propriedade $\mathbf{r} \perp \mathbf{s}$ em todas as ocasiões, valendo-se das rotações dadas por (5), com o quatérnio de rotação dado em (6).

3 Cinemática Iterativa via Quatérnios

Considere um robô manipulador composto por n juntas rotativas ou prismáticas, modelado pela convenção de Denavit-Hartenberg. O método consiste em transformar os sistemas de coordenadas incorporados às componentes do robô de modo que a composição das transformações resulte na configuração final do efetuador, denotado por $P = (\mathcal{B}, \mathbf{r})$, em que $\mathcal{B} = Oxyz = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\mathbf{u} = Ox$, $\mathbf{v} = Oy$ e $\mathbf{w} = Oz$.

Basicamente, a transformação do frame $i - 1$ para o frame i é estabelecida seguindo-se as etapas [12] – veja a Fig. 2:

1. Rotação de Ox_{i-1} com magnitude θ_i em torno de Oz_{i-1} ;
2. Translação da origem O_{i-1} com magnitude d_i ao longo de Oz_{i-1} ;
3. Rotação de Oz_{i-1} com magnitude α_i em torno de Ox_i ;

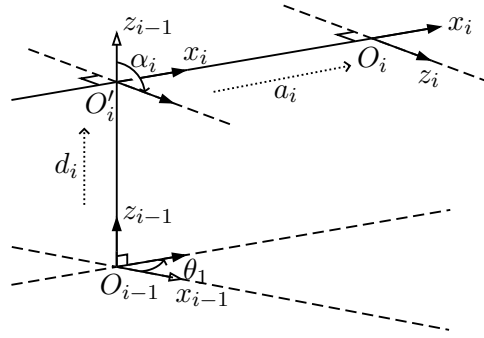


Figura 2: Esquema de deslocamento dos eixos que representam a configuração do robô.

4. Translação da origem O'_i com magnitude a_i ao longo de Ox_i .

A n -ésima iteração resultará no sistema de coordenadas do efetuador \mathcal{B} , isto é, $\mathbf{u} = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}_n$ e $\mathbf{w} = \mathbf{z}_n$. A origem de \mathcal{B} revela a posição do efetuador, e é estabelecidas pela composição das etapas 2 e 4.

A utilização de sistemas de coordenadas ortogonais garante que as etapas 1 e 3 sejam dadas por

$${}^x\xi_i = {}^zq_i {}^x\xi_{i-1} \quad \text{e} \quad {}^z\xi_i = {}^xq_i {}^z\xi_{i-1},$$

onde ${}^x\xi_i = 0 + \mathbf{x}_i$, ${}^z\xi_i = 0 + \mathbf{z}_i$ representam os eixos diretores dos sistemas de coordenadas \mathcal{B}_i incorporados ao robô, e que zq_i e xq_i representam os operadores de rotação em torno dos eixos Oz e Ox , respectivamente, definidos incorporando-se os parâmetros de DH em (6). Isto é:

$${}^zq_i = \cos \theta_i + (\text{sen } \theta_i) \mathbf{z}_{i-1} \quad \text{e} \quad {}^xq_i = \cos \alpha_i + (\text{sen } \alpha_i) \mathbf{x}_i.$$

Além disso, pela ortogonalidade entre os eixos dos sistemas de coordenadas, $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i \times \mathbf{x}_i$.

Por fim, a composição das etapas 2 e 4 é dada pela iteração

$${}^r\xi_i = {}^r\xi_{i-1} + d_i {}^z\xi_{i-1} + a_i {}^x\xi_i, \tag{7}$$

em que ${}^r\xi_i = 1 + \mathbf{r}_i$ é o quatérnio que codifica o vetor posição \mathbf{r}_i . A i -ésima iteração resulta a configuração da i -ésima junta, $P_i = (\mathcal{B}_i, \mathbf{r}_i)$, enquanto que na n -ésima iteração $P = (\mathcal{B}, \mathbf{r})$ é revelado.

3.1 Resultados

Nesta seção foram utilizadas as abreviações: $c\theta = \cos \theta$, $s\theta = \text{sen } \theta$, $\theta_{ij} = \theta_i + \theta_j$ e $\theta_{i\bar{j}} = \theta_i - \theta_j$.

Considere o robô RRR planar. R representa uma junta rotativa. Veja a Figura 3. Para ${}^x\xi_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ e ${}^z\xi_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, as iterações 1, 2 e 3 levam às seguintes soluções:

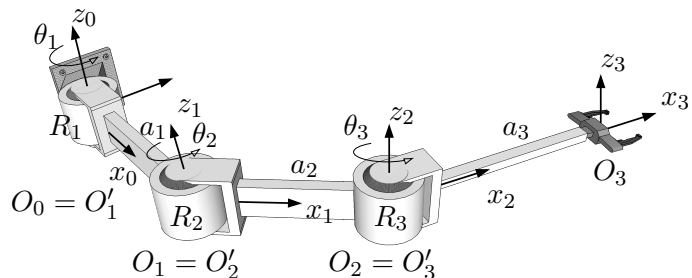


Figura 3: Robô RRR planar.

$${}^x\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c\theta_1 \\ s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^z\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^x\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c\theta_{12} \\ s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^z\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^x\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ c\theta_{123} \\ s\theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^z\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O eixo \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, 3$) é definido pelo produto externo: $\mathbf{v}_i = {}^z\xi_i(2 : 4) \times {}^x\xi_i(2 : 4)$. Para a posição, as iterações retornam

$${}^r\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 c \theta_1 \\ a_1 s \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^r\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 c \theta_1 + a_2 c \theta_{12} \\ a_1 s \theta_1 + a_2 s \theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^r\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 c \theta_1 + a_2 c \theta_{12} + a_3 c \theta_{123} \\ a_1 s \theta_1 + a_2 s \theta_{12} + a_3 s \theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que as iterações revelam as posições das juntas do robô.

Considere o robô SCARA. R e C representam juntas rotativas e cilíndricas, respectivamente. Veja a Figura 4. Para ${}^x\xi_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ e ${}^z\xi_0 = [0 \ 0 \ 0 \ -1]^T$, as iterações 1, 2 e 3 levam às seguintes soluções:

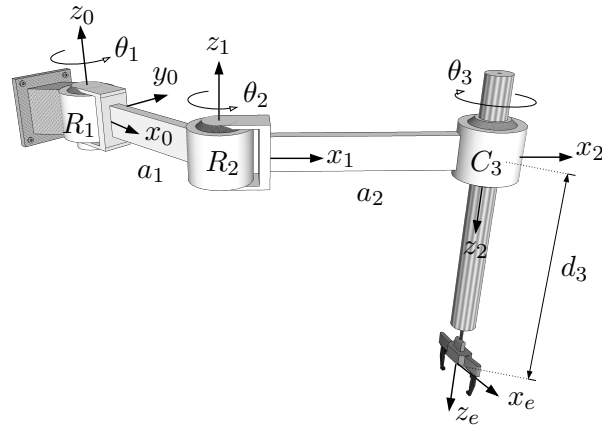


Figura 4: Robô RRC.

$${}^x\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \theta_1 \\ s \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^z\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^x\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \theta_{12} \\ s \theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^z\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^x\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \theta_{123} \\ s \theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^z\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

O eixo \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, 3$) é definido pelo produto externo: $\mathbf{v}_i = {}^z\xi_i(2 : 4) \times {}^x\xi_i(2 : 4)$. Para a posição, as iterações retornam

$${}^r\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 c \theta_1 \\ a_1 s \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^r\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 c \theta_1 + a_2 c \theta_{12} \\ a_1 s \theta_1 + a_2 s \theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^r\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 c \theta_1 + a_2 c \theta_{12} \\ a_1 s \theta_1 + a_2 s \theta_{12} \\ -d_3 \end{bmatrix}.$$

Observe que as iterações revelam as posições das juntas do robô. A última iteração resulta na posição do efetuador, codificada no quatérnio ${}^r\xi_3$.

4 Conclusões

Este trabalho apresentou um método iterativo para resolver a cinemática posicional de robôs manipuladores. O método foi desenvolvido utilizando-se a álgebra dos quatérnios e os pressupostos da convenção de Denavit-Hartenberg. Também foi explicado em que condições as rotações via quatérnios podem ser executadas por multiplicação simples, $\xi' = q \xi$, economizando um produto quaterniano em cada iteração, reduzindo o número de operações para a metade, quando comparado as rotações por multiplicação conjugada, $\xi' = q \xi q^*$.

Quando comparado com o trabalho de *Aspragathos* e *Dimitros*, o método apresentado é computacionalmente ainda mais vantajoso, já que utiliza quatérnios ao invés de quatérnios duais para determinar a configuração de um robô.

Os exemplos, mesmo que simples, mostram a fácil aplicabilidade do método apresentado. Os problemas mais desafiadores serão os objetos das investigações futuras.

Referências

- [1] N. A. Aspragathos and J. K. Dimitros. A comparative study of three methods for robot kinematics. *IEEE*, 28(2):135–145, April 1998.
- [2] Y. Aydin and S. Kucuk. Quaternion based inverse kinematics for industrial robot manipulators with euler wrist. *IEEE*, (1-4244-9713-4/06):581–586, 2006.
- [3] R. Campa and K. Camarillo. Unit quaternions: A mathematical tool for modeling, path planning and control of robot manipulators. 2008.
- [4] J. R. Dooley and J. M. McCarthy. On the geometric analysis of optimum trajectories for cooperating robots using dual quaternion coordinates. *IEEE transactions on robotics and automation*, pages 1031–1036, 1993.
- [5] J. B. Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press, 1999.
- [6] P. Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, 2001.
- [7] K. T. Miura. Unit quaternion integral curve: A new type of fair free-form curves. *Computer Aided Geometric Design*, 17:39–58, 2000.
- [8] I. Porteous. *Clifford algebra and the classical groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [9] L. Radavelli. Análise cinemática direta de robôs manipuladores via álgebra de clifford e quatérnios. Dissertação, UFSC, 2013.
- [10] L. Radavelli, R. Simoni, E. R. De Pieri, and D. Martins. A comparative study of the kinematics of robot manipulators by Denavit-Hartenberg and dual quaternion. *Mecânica Computacional*, Vol.XXXI:pp.2833–2848, Novembro 2012.
- [11] S. Sahul, B. B. Biswall, and B. Subudhi. A novel method for representing robot kinematics using quaternion theory. *IEEE sponsored conference on computational intelligence, control and computer vision in robotics & automation*, 2008.
- [12] L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, and B. Siciliano. *Robotics: Modelling, planning and control*. Springer-Verlag, London, 2009.
- [13] K. Shoemake. *Quaternion Calculus for Animation*. SIGGRAPH '89, 1989.
- [14] M. Shoham and P. Ben-Horin. Application of grassmann-cayley algebra to geometrical interpretation of parallel robot singularities. *Int. J. Rob. Res.*, 28:127–141, 2009.
- [15] J.-Y. Wang, H.-Z. Liang, Z.-W. Sun, S.-N. Wu, and S.-J. Zhang. Relative motion coupled control based on dual quaternion. *Aerospace Science and Technology*, 25:102–113, 3 2013.
- [16] J. P. Ward. *Quaternions and Cayley Numbers*, volume 403. Springer Science Business Media Dordrecht, 1997.
- [17] A. T. Yang and F. Freudenstein. Application of dual-number quaternions to the analysis of the spatial mechanism. *AMSE Transactions Journal of Applied Mchanics*, 86:300–308, June 1964.