

Problema de Escoamento Não Saturado em Meios Porosos Rígidos

Daniel Moutinho de Souza **Riedson Baptista**

Departamento de Matemática Aplicada, CEUNES, UFES,
29932-540, São Mateus, ES

E-mail: danielmoutinho11@gmail.com, riedsonb@ceunes.ufes.br

RESUMO

Este trabalho de Iniciação Científica apresenta uma formulação numérica para o problema de escoamento não saturado em meios porosos rígidos. O escoamento é governado pela lei de conservação de massa para fase ar e água e pela lei de Darcy [1], considerando a incompressibilidade do escoamento que ocupa todo o meio poroso rígido, homogêneo e isotrópico chegamos a equação de Richards. A Equação de Richards é uma equação diferencial parcial não linear que governa o processo de escoamento não saturados em meios porosos rígidos. Tendo em vista sua não linearidade soluções analíticas e numéricas tomam-se difíceis. Porém este problema pode ser contornado por algumas aproximações.

Em nosso estudo trabalhamos com fluido bifásico água-ar, porém em geologias rasas a fase ar pode ser aproximada pela pressão atmosférica constante. Desta forma o problema de escoamento não saturado se resume apenas a conservação de massa para a fase água como mostrado na equação a seguir:

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla p_a) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

onde, K é o tensor de condutividade hidráulica, θ é o teor de umidade, t é o tempo e p_a é a fonte de pressão. Para fluidos em meios porosos este potencial pode ser dado por $p_a = \psi + z$, onde ψ é o potencial piezométrico e z é a coordenada de elevação (direção vertical). Para um meio homogêneo e isotrópico, o tensor de condutividade hidráulico K é dado pelo produto do escalar k pela matriz identidade. Consideramos assim $k = k_r k_s$, onde k_r é condutividade hidráulica relativa para o solo não saturado e k_s é a condutividade hidráulica do solo saturado. Assim obtemos a seguinte forma para a equação de Richards:

$$\nabla \cdot (k_r \nabla \psi) + \frac{\partial k_r}{\partial z} = \frac{1}{k_s} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2)$$

Van Genuchten [2], [3], tem aproximações realísticas para condutividade hidráulica e saturação efetiva, porém uma expressão mais simples, porém muito importante para obtenção da solução analítica para a equação (2), é a formulação de Gardner [2], [3] descrita abaixo:

$$k_r = S_e = e^{\alpha \psi} \quad (3)$$

onde, α é um parâmetro com base no tipo do solo. Usamos a equação (3) para a condutividade hidráulica relativa, sendo o teor de umidade dado por:

$$\theta = \theta_d + (\theta_s - \theta_d) S_e \quad (4)$$

onde, θ_d é o teor de umidade quando o solo está drenado e θ_s o teor de umidade quando o solo está saturado. Utilizando separação de variáveis e série de Fourier obtemos a seguinte solução para a equação (2):

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \ln(\bar{\psi} + \epsilon) \quad (5)$$

onde

$$\bar{\psi} = (1 - e^{\alpha\psi_d})e^{\frac{\alpha}{2}(L-z)} \left[\frac{\sinh(\frac{\alpha}{2}z)}{\sinh(\frac{\alpha}{2}L)} + \frac{2}{Lc}e^{\frac{\alpha}{2}(L-z)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda_k}{\mu_k} \operatorname{sen}\lambda_k z e^{-\mu_k t} \right], \quad (6)$$

com

$$c = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_d)}{k_s}, \quad \mu_k = \frac{\alpha^2}{4} + \lambda_k^2, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{L}k$$

sendo ψ_d a pressão quando o solo está drenado, $k = 0, 1, 2, \dots$ e t a evolução temporal.

A seguir apresenta-se um experimento utilizando a solução obtida.

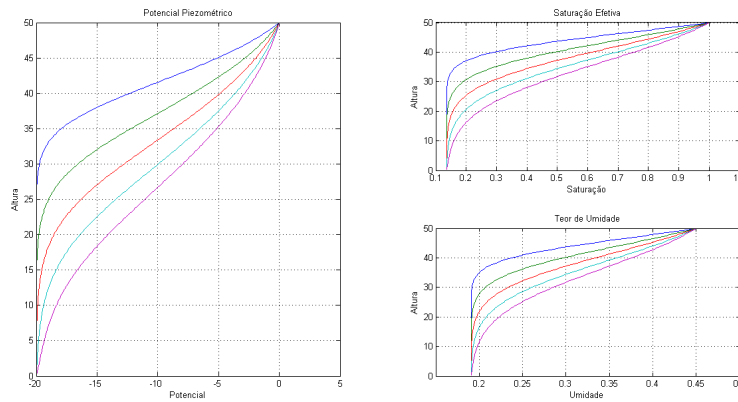


Figura 1: $L = 50m$; $k_s = 0,1m/dia$; $h_d = -20m$; $\theta_d = 0,15$; $\theta_s = 0,45$; $\alpha = 0,1m^{-1}$, $T_f = 30$ dias com $\Delta t = 6$ dias

Como trabalhos a serem realizados futuramente, destacam-se: Resolução numérica usando Método de Elementos Finitos para o espaço e Diferenças Finitas para o tempo e imposição de condutividade hidráulica e saturação mais realísticos.

Palavras-chave: *Equação de Richards, Meios Porosos, Solução Analítica*

Referências

- [1] A.J. Rosa, R. S. Carvalho, J. A. D. Xavier. "Engenharia de Reservatório de Petróleo", Interciência, Rio de Janeiro, RJ, 2006.
- [2] M.L.P. Pizarro, "Simulação de fluxo de água e transporte de solutos na zona não saturada do solo pelo método de elementos finitos adaptativo", Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 2009.
- [3] M. Mannich, "Desenvolvimento de soluções analíticas e numéricas da equação de Richards", Dissertação de Mestrado, PPGERHA-UFPR, 2008.