Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Aplicação de Métodos Numéricos e Analítico na Solução de Um Problema de Deflexão em Vigas

Adriana Martins **Ana Raíza Ciscoto Yoshioka** **Guilherme Bertuzzo Lima**
Coordenação de Engenharia Civil, COECI, UTFPR-CM
87301-899, Campo Mourão, PR
E-mail: adriana.martins77@yahoo.com.br, raiza.11@gmail.com, guiberlim@hotmail.com

Adilandri Mércio Lobeiro
Departamento de Matemática, DEMAT, UTFPR-CM
87301-899, Campo Mourão, PR
E-mail: alobeiro@utfpr.edu.br

Eloy Kaviski **Liliana Madalena Gramani**
Departamento de Hidráulica e Saneamento, DHS, UFPR
Departamento de Matemática, DMAT, UFPR
81531-970, Campus Politécnico, Curitiba, PR
E-mail: eloy.dhs@ufpr.br, gramani@mat.ufpr.br

RESUMO

A equação diferencial da linha elástica para uma viga em balanço, sujeita a uma carga pontual aplicada em sua extremidade é

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P(L-x), \tag{1}$$

onde L é o comprimento da viga, E é o módulo de elasticidade e I é momento de inércia [3] . Relacionando as condições $y(0) = 0$ e $y(L) = v_{\text{máx}} = -PL^3/3EI$, obtém-se o Problema de Valor de Contorno (PVC)

$$\left| \begin{array}{l} EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = -P(L-x) \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(L) = -\dfrac{PL^3}{3EI}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Para um estudo de caso, considera-se $E = 30000$ ksi, $I = 800$ in^4, $P = 1$ kip e $L = 10$ pés [2] . O objetivo deste trabalho é obter as soluções analítica e numérica do PVC

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x-10}{24000000} \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(10) = -\dfrac{1}{72000}. \end{array} \right. \tag{3}$$

A solução analítica para o PVC (3) é

$$y(x) = \frac{-10x^2}{48000000} + \frac{x^3}{144000000}. \tag{4}$$

Para obter a solução numérica do PVC (3), foi aplicado o Método das Diferenças Finitas (MDF), substituindo as derivadas da equação diferencial pelas fórmulas de diferenças centradas obtendo a equação

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = -h^2\left(\frac{x_i - 10}{24000000}\right), \tag{5}$$

onde $y_i \approx y(x_i)$ para $i = 1, 2, \cdots, N$. Para isso, escolheu-se um número inteiro $N = 19$ e dividiu-se o intervalo $[0; 10]$ em 20 subintervalos de mesmo comprimento cujos extremos são os pontos da malha $x_i = ih$ para $i = 0, 1, 2, \cdots, 20$ com $h = 0.5$. Fazendo $i = 1, 2, \cdots, 19$ na equação (5) e utilizando as condições de contorno $y_0 = 0$ e $y_{20} = -1/72000$ obtém-se um sistema de equações lineares que, quando expresso na forma matricial, apresenta uma matriz de coeficentes tridiagonal de ordem 19×19 [1]. Para resolver esse sistema, utilizou-se o *software Maple*, encontrando a solução numérica do PVC (3).

A Tabela 1 apresenta uma comparação para alguns dos pontos calculados.

Tabela 1: Comparação entre as Soluções Analítica e Numérica

i	x_i	*Numérica*	*Analítica*	*Erro Percentual*
0	0	0	0	—-
1	0,5	$-5,121527774 \cdot 10^{-8}$	$-5,121527777 \cdot 10^{-8}$	$0,000000058576273$
4	2,0	$-7,777777777 \cdot 10^{-7}$	$-7,777777778 \cdot 10^{-7}$	0,000000012857139
8	4,0	$-2,888888889 \cdot 10^{-6}$	$-2,888888889 \cdot 10^{-6}$	0,000000000000000
12	6,0	$-6,000000000 \cdot 10^{-6}$	$-6,000000000 \cdot 10^{-6}$	0,000000000000000
16	8,0	$-9,777777778 \cdot 10^{-6}$	$-9,777777778 \cdot 10^{-6}$	0,000000000000000
20	10	$-1/72.000$	$-1/72.000$	—-

A Figura 1 apresenta os gráficos das soluções analítica e numérica.

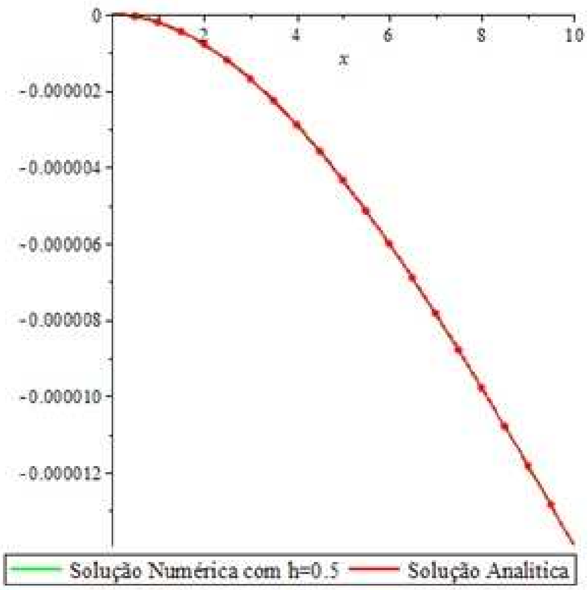

Figura 1: Função Da Linha Elástica

Com base na Tabela 1 e Figura 1 conclui-se a eficiência do MDF.

Palavras-chave: *Diferenças Finitas, Deflexão de viga, Equações Diferenciais*

Referências

[1] R. L. Burden, D. J. Faires, “Análise Numérica, 1^a Edição, São Paulo, Editora Thomson, 2003.

[2] S. C. Chapra, “Métodos numéricos para engenharia”, 5. ed, São Paulo, SP: McGraw-Hill, 2008

[3] R. C. Hibbeler “Resistência dos materiais”, 7. ed, São Paulo, SP: Pearson, 2010. .

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0198