Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Estudo da Variação de Temperatura entre Circunferências Concêntricas Utilizando o Método das Diferenças Finitas

Adilandri Mércio Lobeiro **Julia M. N. Mimura** **Mariana S. Ribeiro**
Departamento Acadêmico de Matemática, DAMAT, UTFPR
87301-899, Campus Campo Mourão, PR
E-mail: alobeiro@utfpr.edu.br, juliamimura@hotmail.com, marisr-08@yahoo.com.br

Clicia Geovana Alves Pereira **Juan Amadeo Soriano Palomino**
Departamento de Ciências, DCI, UEM
Departamento de Matemática, DMA, UEM
87360-000, Campus Goioerê, PR
E-mail: cgapereira2@uem.br, jaspalomino@uem.br

RESUMO

A temperatura $y(x)$ na região entre as circunferências concêntricas de raios $x_0 = a$ e $x_1 = b$, onde $a < b$, é determinada a partir do Problema de Valor de Contorno (PVC)

$$\left| \begin{array}{c} xy''(x) + y'(x) = 0 \\ y(a) = y_0 \ \ , \, y(b) = y_{n+1}, \end{array} \right. \tag{1}$$

onde y_0 e y_{n+1} são contantes [2].

O objetivo deste trabalho é obter a solução analítica e numérica de um estudo de caso do PVC (1). Para isso, considera-se o PVC

$$\left| \begin{array}{c} xy''(x) + y'(x) = 0 \\ y(1) = 50 \ \ , \, y(4) = 100. \end{array} \right. \tag{2}$$

A solução analítica é dada por

$$y(x) \quad = \quad \frac{25}{\ln 2} \ln x + 50. \tag{3}$$

Para obter a solução numérica utilizou-se o Método das Diferenças Finitas (MDF). Tal método consiste em escolher um número inteiro $n > 0$ e discretizar o domínio $[a, b]$ em $n + 1$ subintervalos de tamanho $h = (b - a)/(n + 1)$, obtendo-se $n + 2$ pontos $x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} = b$ [1]. Nos pontos de malha interiores, x_i, para $i = 1, \cdots, n$, a equação diferencial a ser aproximada é

$$x_i y''(x_i) + y'(x_i) \quad = \quad 0 \ . \tag{4}$$

A ideia do MDF é substituir as derivadas da equação (4) pelas fórmulas de Diferenças Centradas. Desta forma, expandindo a função $y(x_i)$ em Série de Taylor, centrada em ξ, e adotando $h = x_i - \xi$ pequeno, pode-se ignorar termos que envolvam h^2 e ordem superior (h^3 e ordem superior, respectivamente) e obtém-se aproximações para

$$y'(x_i) \quad = \quad \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \tag{5}$$

e

$$y''(x_i) \quad = \quad \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} \ . \tag{6}$$

Adotando $y_i = y(x_i)$ e substituindo as equações (5) e (6) na equação (4), um MDF é obtido utilizando-se essa equação com as condições de contorno $y(1) = 50$ e $y(4) = 100$

$$\left| \begin{array}{lcl} \left(x_i - \dfrac{h}{2}\right) y_{i-1} - 2x_i y_i + \left(x_i + \dfrac{h}{2}\right) y_{i+1} & = & 0 \\ y(1) = 50 \ \ , \ \ y(4) = 100, & & \end{array} \right. \tag{7}$$

com $i = 1, ..., n$. A solução numérica consiste em obter as temperaturas y_i nos pontos discretizados. Para isso, basta resolver o sistema de equações lineares (7) onde a matriz dos coeficientes é uma matriz tridiagonal de ordem $n \times n$ [1]. Para obter a solução numérica do PVC (2) utilizou-se o *software Maple 17* para implementar o MDF.

Neste estudo de caso, discretizou-se o domínio $[1; 4]$ em 30 subintervalos de tamanho $h = 0,1$, obtendo 31 pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1$, $\cdots$, $x_{29} = 3,9$, $x_{30} = 4$ e formando um sistema de 29 equações e 29 incógnitas, sendo as incógnitas as aproximações y_i em cada um dos pontos discretizados x_i.

A Figura 1 apresenta os gráficos de ambas as soluções, deixando claro a proximidade entre os valores numéricos e analíticos.

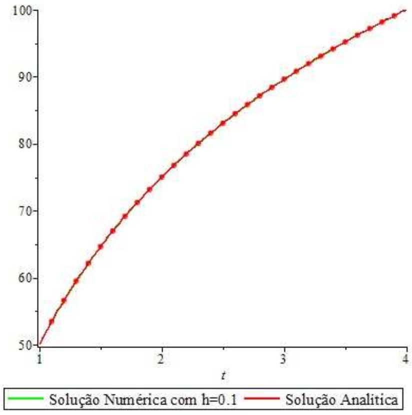

Figura 1: Função Temperatura

A Tabela 1 apresenta uma comparação mais clara para alguns dos pontos calculados.

Tabela 1: Resultados e Erro

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	Erro absoluto	Erro Relativo
0	1,0	50	50	0	—
1	1,1	53,43595451	53,43758809	0,001633580	0,000030570
10	2,0	74,99578340	75,00000001	0,004216610	0,000056221
20	3,0	89,62187366	89,62406253	0,002188870	0,000024423
29	3,9	99,08664501	99,08685309	0,000208080	0,000002100
30	4,0	100	100	0	—

Com base no erro relativo, pode-se concluir a eficácia do método quanto à aproximação dos resultados.

Palavras-chave: *Maple, Diferenças Finitas, Equação Diferencial*

Referências

[1] R. L. Burden, D. J. Faires, “Análise Numérica”, 1^a Edição, São Paulo, Editora Thomson, 2003.

[2] S. C. Chapra, “Métodos Numéricos para Engenharia”, 5. ed, São Paulo, SP: McGraw-Hill, 2008

 © 2015 SBMAC