

# Transporte e ressuspensão de sedimentos finos por ondas sobre um leito viscoelástico

**Juliana S. Ziebell,**

Instituto de Matemática, Estatística e Física, IMEF, FURG,  
96201-900, Rio Grande, RS  
E-mail: julianaziebell@furg.br, jusziebell@gmail.com,

**Leandro Farina**

UFRGS - Instituto de Matemática Pura e Aplicada  
91509-900, Porto Alegre, RS  
E-mail: farina@mat.ufrgs.br.

## Resumo:

*Soluções numéricas da equação do transporte unidimensional que descrevem a evolução da concentração de sedimentos suspensos sobre um leito viscoelástico foram obtidas para alguns casos particulares.*

*Usando o modelo viscoelástico generalizado de [5] para definir a camada de lama viscoelástica, obtivemos uma nova equação do transporte unidimensional para esse mesmo problema.*

**Palavras-chave:** Ondas em fluidos, Lama viscoelástica, Equação do transporte

## 1 Introdução

O movimento dos sedimentos no fundo de um meio aquático, causado pelo fluido, tem sido considerado um importante problema a ser estudado na engenharia costeira e na geologia [4].

O artigo [4] apresentou uma teoria analítica para ondas harmônicas simples sobre um fundo plano, a fim de examinar como ondas transportam sedimentos finos sozinhas, sem o efeito do vento, pela convecção e difusão, depois de ressuspê-los do fundo. Para obter essa equação o método de múltiplas escalas foi empregado.

Já se uma camada de água está sobre uma camada de lama fluida, seu movimento oscilatório pode ser alterado. Desse modo, o transporte de partículas suspensas na camada limite que fica sobre a interface entre as duas camadas também pode ser modificado, tornando-se um interessante objeto de estudo.

De acordo com [1], o modelo mais adequado para representar as propriedades reológicas da lama fluida é o modelo viscoelástico. Há duas maneiras de definir esse modelo: o *corpo de Voight* [2] e o *modelo viscoelástico generalizado* [5].

Neste trabalho, avaliamos o modelo proposto em [8], apresentando resultados numéricos da equação do transporte para a concentração de sedimentos no fundo da água sob um leito viscoelástico definido como um corpo de Voight. Ainda, considerando o modelo viscoelástico generalizado, obtivemos uma nova equação do transporte para a concentração desses sedimentos.

## 2 O problema

Consideramos um sistema de duas camadas. A camada superior é formada por água de profundidade  $h$  e está sobre uma fina camada de lama fluida, a qual estamos supondo viscoelástica, de profundidade  $d$ . Assumimos também que a profundidade da lama fluida é constante. De acordo

com [5], em águas costeiras a profundidade típica  $d$  da lama é geralmente de ordem  $0.5 m$  e é muito menor do que a profundidade  $h$  da camada superior de água, logo,  $h \gg d$ .

Suponhamos que uma onda progressiva de pequena amplitude se propague na direção horizontal  $x$  sob a superfície da água, cujo deslocamento é dado por

$$\eta = \text{Re}[ae^{i(kx-\sigma t)}], \tag{1}$$

onde  $a$  é a amplitude da onda,  $i$  é a unidade do número complexo,  $k$  é o número de onda,  $\sigma$  é a frequência angular da onda e  $t$  é o tempo. Estamos considerando  $a, \sigma \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{C}$ .

Ainda, consideramos o eixo vertical  $z$  apontando verticalmente para cima. Assim, definiremos o deslocamento da interface por

$$z = \xi(x, t) = be^{i(kx-\sigma t)}. \tag{2}$$

Por fim, denotamos as densidades da água e da lama fluida por  $\rho_w$  e  $\rho_m$ , respectivamente.

Consideramos ondas de comprimento e amplitude pequenos de modo que  $kh = \mathcal{O}(1)$  e  $ka \ll 1$ . Vamos estudar o caso quando a espessura da camada de lama fluida é comparável à espessura da camada limite de Stokes.

Além disso, assumimos que a profundidade da lama fluida  $d$  e a espessura da camada limite que surge sob a lama fluida  $\delta_m = (2\nu_m/\sigma)^{1/2}$  são ambas comparáveis com a amplitude da onda sobre a superfície da água  $a$ , do mesmo modo que foi proposto em [3]. Ainda, a camada limite de Stokes tem espessura dada por  $\delta_w = (2\nu_w/\sigma)^{1/2}$  e é desenvolvida na interface entre a água e a lama fluida, onde  $\nu_w$  é a viscosidade da água como em [3].

Definimos a declividade da onda por  $\epsilon = ka \ll 1$ , que é escolhido como um parâmetro pequeno.

### 3 Modelo 1: Corpo de Voight

Para obtermos a solução, expandimos as coordenadas da velocidade

$$(u_f, v_f) = (u_{f_0}, v_{f_0}) + \epsilon(u_{f_1}, v_{f_1}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3}$$

e assumimos que as componentes da velocidade de primeira ordem e a onda da interface são definidas pelo mesmo harmônico que a superfície da onda, ou seja,

$$(u_{f_0}, v_{f_0}, \xi) = \text{Re}[(\tilde{u}_f, \tilde{v}_f, b)e^{i(kx-\sigma t)}] \tag{4}$$

onde a condição cinemática na interface é

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_{w0} \Big|_{z=-h}. \tag{5}$$

As soluções gerais das equações acima foram obtidas em [7] e são dadas por, respectivamente,

$$\tilde{u}_w = (1 + De^{-\lambda_w z})\tilde{U}_I, \quad \text{em } z > 0, \tag{6}$$

$$\tilde{u}_m = [\gamma - \gamma \cosh(\lambda_m(z+d)) + H \sinh(\lambda_m(z+d))]\tilde{U}_I, \quad \text{em } 0 > z > -d, \tag{7}$$

$$\tilde{v}_w = -ik\lambda_w^{-1}(\lambda_w z + B - De^{-\lambda_w z})\tilde{U}_I \quad \text{em } z > -h \tag{8}$$

e

$$\tilde{v}_m = -ik\lambda_w^{-1}[\gamma(\lambda_w(z+d) - \sinh(\lambda_w(z+d))) + H(\cosh(\lambda_w(z+d)) - 1)]\tilde{U}_I, \quad \text{em } -h > z > -d, \tag{9}$$

onde

$$B = \zeta[\gamma(\lambda_m d - \sinh(\lambda_m d)) + H(\cosh(\lambda_m d) - 1)] + D, \tag{10}$$

$$D = \frac{-\gamma\zeta - (1 - \gamma)\zeta \cosh(\lambda_m d)}{\zeta \cosh(\lambda_m d) + \gamma \sinh(\lambda_m d)} \quad (11)$$

e

$$H = \frac{\gamma(1 - \gamma) + \gamma^2 \cosh(\lambda_m d) + \gamma\zeta \sinh(\lambda_m d)}{\zeta \cosh(\lambda_m d) + \gamma \sinh(\lambda_m d)} \quad (12)$$

sendo

$$\zeta = (\nu_m^+ / \nu_w)^{1/2} \quad (13)$$

um parâmetro complexo relacionado com a variação da viscosidade, onde

$$\nu_m^+ = \nu_m + iG_m / \rho_m \sigma \quad (14)$$

é o parâmetro complexo viscoelástico. Observamos que nesse ponto o modelo viscoelástico [8] se diferencia do modelo viscoso [6], pois nesse último  $G_m = 0$ .

A amplitude do deslocamento da interface é dada por

$$b = i\sigma^{-1} \tilde{v}_w \Big|_{z=-h} = k\sigma^{-1} \lambda_w^{-1} (B - D) \tilde{U}_I. \quad (15)$$

Após determinarmos a velocidade da água, podemos avaliar como se desenvolve o transporte de sedimentos gerado pelas ondas.

## 4 Modelo 2: Modelo viscoelástico generalizado [5]

Para a camada de água, usamos a seguinte normalização

$$(x', z', h) = \frac{g}{\sigma^2} (x, z, H), \quad t' = \sigma^{-1} t, \quad k' = \frac{\omega^2}{g} k, \quad (16)$$

$$\Phi' = \frac{a_0 g}{\sigma} \Phi, \quad \eta' = a_0 \eta, \quad (P'^{(w)}, p'^{(w)}) = \rho^{(w)} g a_0 (P^{(w)}, p^{(w)}), \quad (17)$$

onde  $g$  é a gravidade,  $\rho^{(w)}$  é a densidade da água,  $\sigma$  é a frequência e  $t$  é o tempo.

Para a camada de lama fluida, definimos uma nova coordenada vertical medida a partir do fundo dessa camada  $Z' = z' + h + d$  e usamos a seguinte normalização

$$x' = \frac{g}{\sigma^2} x, \quad Z' = dZ, \quad t' = \sigma^{-1} t, \quad \xi' = \epsilon a_0 \xi, \quad (18)$$

$$u' = a_0 \sigma u, \quad v' = \left( \epsilon a_0 \sigma \frac{d}{a_0} \right) v, \quad (p', P) = (\gamma \rho^{(m)} g a_0) (p^{(m)}, P^{(m)}). \quad (19)$$

### 4.1 Solução do problema

Como em [5], expandimos em série de potências as variáveis  $u_f, v_f, \Phi, \dots$ , e escrevemos cada incógnita  $\mathcal{F}$  como

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \epsilon \mathcal{F}_1 + \epsilon^2 \mathcal{F}_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (20)$$

onde  $(\eta_n, \xi_n)$  dependem de  $(x, x_1; t, t_1)$ ,  $\Phi_n = \Phi_n(x, x_1; z; t, t_1)$  na água e  $(u_n, v_n)$  de  $(x, x_1; Z; t, t_1)$  na lama fluida.

Ainda, definimos que

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{00} + (\mathcal{F}_{01} e^{i\psi} + \text{c.c.}), \quad (21)$$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{10} + (\mathcal{F}_{11} e^{i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{21} e^{2i\psi} + \text{c.c.}), \quad (22)$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{20} + (\mathcal{F}_{21} e^{i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{22} e^{2i\psi} + \text{c.c.}) + (\mathcal{F}_{32} e^{3i\psi} + \text{c.c.}) \quad (23)$$

e assim sucessivamente, onde  $\mathcal{F}_{nm} = \mathcal{F}_{nm}(z, x_1, t_1) \forall n, m \in \mathbb{N}$ . Observemos que assim temos  $\mathcal{F}_{nm,x}(z, x_1, t_1) = \mathcal{F}_{nm,t}(z, x_1, t_1) = 0 \forall n, m \in \mathbb{N}$ .

Com essas hipóteses, [5] mostrou que as coordenadas da velocidade de  $\mathcal{O}(1)$  e  $\mathcal{O}(\epsilon)$  são dadas por

$$u_{w_{01}} = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{01}e^{i\psi}) = ik_0\Phi_{01}a_0\sigma = \frac{k_0A \cosh Q}{2 \cosh q}, \quad (24)$$

$$v_{w_{01}} = -\frac{iAk_0 \sinh Q}{2 \cosh q}, \quad (25)$$

$$u_{w_{10}} = \frac{\partial\Phi_{00}}{\partial x_1}, \quad (26)$$

$$u_{w_{11}} = \left[ \frac{-i}{2} \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{\cosh Q}{\cosh q} + ik_0 \left( ik_1 C_g A \sinh q \sinh Q - \frac{Q \sinh Q}{2k_0 \cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) \right], \quad (27)$$

$$u_{w_{12}} = ik_0 \frac{3i}{8} \frac{A^2}{\sinh^4 q} \cosh(2Q), \quad (28)$$

$$v_{w_{10}} = 0, \quad (29)$$

$$v_{w_{11}} = \left[ ik_1 k_0 C_g A \sinh q \cosh Q - k_0 \frac{\sinh Q + Q \cosh Q}{2k_0 \cosh q} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right] \quad (30)$$

e

$$v_{w_{12}} = \frac{3ik_0}{8} \frac{A^2}{\sinh^4 q} \sinh(2Q). \quad (31)$$

## 5 Método

Por [8] e [4], a equação do transporte de massa pode ser escrita como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \epsilon u_w \frac{\partial C}{\partial x} + (\epsilon v_w - v_f) \frac{\partial C}{\partial z} = \epsilon^2 E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \quad (32)$$

A equação (32) está sujeita às condições de contorno

$$v_f C + E \frac{\partial C}{\partial z} = \epsilon^2 \mathcal{E} |\tau_b|, \text{ em } z = \epsilon \xi. \quad (33)$$

$$C = 0 \text{ in } z \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Como Ng e Wu [8], expandimos a concentração e as derivadas temporais como

$$C \rightarrow C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon C_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (35)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T}, \quad (36)$$

onde  $T = \epsilon^2 t$  é o tempo lento para descrever os processos de transportes longitudinais.

Esperamos que o termo de ordem zero  $C_0 = C_0(x, z, T)$  represente a concentração principal no tempo e portanto não depende do tempo rápido  $t$ , enquanto que os termos de ordem mais alta  $C_n = C_n(x, z, t, T)$ , para  $n = 1, 2, \dots$  são funções de ambos os tempos.

A solução da equação da concentração de sedimentos é obtida através das equações de ordem  $\mathcal{O}(1)$ ,  $\mathcal{O}(\epsilon)$  e  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Essa solução depende das coordenadas da velocidade da água, que por sua vez, dependem de como a camada de lama fluida é definida.

### 5.1 Concentração de sedimentos no fundo - modelo 1

A equação do transporte para a concentração de partículas no fundo foi obtida em [8] e é dada por

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \tag{37}$$

onde

$$U = \frac{\langle \tilde{u}_{w2} F \rangle}{\langle F \rangle} + \frac{\text{Re}[\langle \tilde{u}_w^* M \rangle - b \tilde{u}_w^* |_{z=-h}]}{2 \langle F \rangle} \text{ e } D_T = \frac{\text{Re} \langle \tilde{u}_w^* N \rangle}{2 \langle F \rangle}. \tag{38}$$

As funções  $M$  e  $N$  dependem de  $z$  e são dadas por

$$N(z) = \sigma^{-1} \tilde{U}_I (A_1 e^{-\beta z/\alpha} - i e^{-z/\alpha} + A_2 e^{-(A_0+1)z/\alpha}) \tag{39}$$

e

$$M(z) = k \sigma^{-1} \tilde{U}_I [A_3 e^{-\beta z/\alpha} + A_4 e^{-z/\alpha} + A_5 e^{-(A_0+1)z/\alpha} + (z/\alpha) e^{-z/\alpha}] \tag{40}$$

onde  $A_i$  são constantes para  $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

#### 5.1.1 Resultados numéricos

Consideramos os seguintes valores para os parâmetros normalizados:

- i)  $\gamma = 0.8$ ,  $\hat{\delta}_m = 5$  a  $8$ ,  $\hat{\lambda}_e = 0.3, 0.15$  e  $0.1$
- ii)  $\hat{\lambda}_m = \mathcal{O}(0.1)$ ,  $\hat{d} = \mathcal{O}(10)$ ,  $Pe = Sc = 1$ .

As soluções numéricas que apresentaremos nesse trabalho foram obtidas usando a rotina desenvolvida em *Fenics project* [9]. Para uma concentração inicial  $C_b(x, 0) = 100$  obtivemos o gráfico apresentado na figura 1.

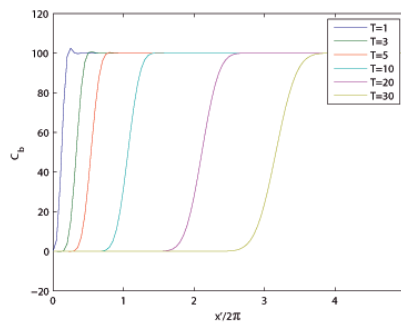


Figura 1:  $C_b$  como função de  $x/2\pi$  para  $C_b(x, 0) = 100$  e  $T = 1, 3, 5, 10, 20$ , e  $30$ .

A seguir consideramos que há erosão em uma faixa para  $x'/2\pi \in [0, 1]$  como em [4]. Usando a mesma normalização, a equação que formula o problema será dada por

$$\frac{\partial C'}{\partial T'} + \hat{U} \frac{\partial C'}{\partial x'} = [\hat{E} - \hat{D}_T] \frac{\partial^2 C'}{\partial x'^2} + \mathcal{E}_{\mathcal{R}}'(x'), \tag{41}$$

onde

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}'(x') = \begin{cases} 1, & 0 < x' < L' = kL \\ 0, & x' < 0, x' > L. \end{cases} \tag{42}$$

Consideramos a concentração inicial nula. Adotamos a mesma normalização usada em [8] e em [4].

A solução da equação do transporte uni-dimensional em um sistema sem a camada de lama fluida e com erosão foi encontrada analiticamente em [4]. Comparamos a solução numérica

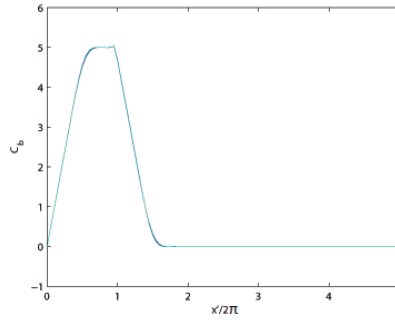


Figura 2:  $C_b$  como função de  $x/2\pi$  para  $\hat{\delta}_m = 5$ ,  $\hat{\lambda}_m = 0.1$  e  $d = 0.0, 0.25, 0.5$  e  $1.0$ .

obtida por nós e a solução analítica obtida por Mei e vimos que o erro é da ordem de  $\mathcal{O}(10^{-3})$ . A seguir resolvemos a equação para  $\hat{d} = \{0.25, 0.5, 1.0\}$  com  $T = 5$ . O gráfico está na figura 2. Observemos que não houve mudança para  $\hat{d}$  pequeno, já que as curvas estão sobrepostas.

O resultado para  $\delta = 5$ ,  $\lambda = 0.1$  e  $\hat{d} = 7, 8, 9, 10, 11$  e  $12$  são dados na figura 3. Observamos que os picos não sofrem alterações consideráveis ao variar a espessura na camada de lama fluida. Porém, conforme essa camada aumenta, o pico da concentração se desloca para  $x'$  menor.

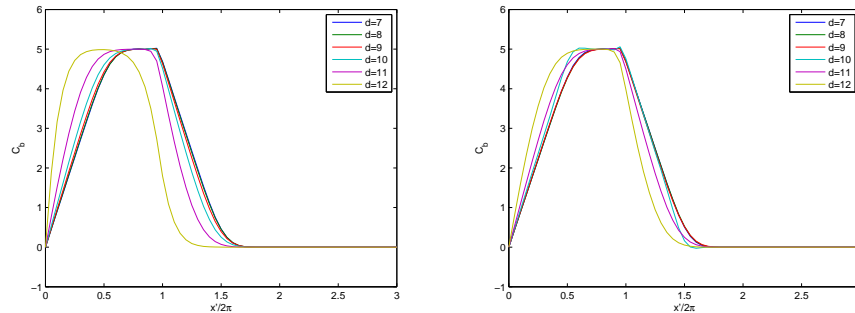


Figura 3:  $C_b$  como função de  $x/2\pi$  para  $\hat{\delta}_m = 5$  e  $\hat{\delta}_m = 8$ ,  $\hat{\lambda}_m = 0.1$  e  $d = 7, 8, 9, 10, 11$  e  $12$  e  $T = 5$ .

### 5.2 Concentração de sedimentos no fundo - modelo 2

Obtivemos que a equação adimensional para a concentração no fundo é dada por

$$\frac{\partial C_b}{\partial T} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = [E - D_T] \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2}, \tag{43}$$

onde

$$U = \frac{a_0 \sigma^2}{g} \left[ \frac{\langle \overline{u_{w1} F} \rangle}{2 \langle F \rangle} + \frac{\text{Re} \langle \overline{u_{w0}^* M} \rangle}{2 \langle F \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\text{Re}(\xi_{01} u_{01}^*)_{z=0}}{\langle F \rangle} \right] \text{ e } D_T = -\frac{a_0 \sigma^2}{g} \frac{\text{Re} \langle \overline{u_{w0}^* N} \rangle}{2 \langle F \rangle}, \tag{44}$$

Com esse modelo, as funções  $M$  e  $N$  são dadas por

$$M(z) = B_1 e^{-\theta z/\alpha} + (B_2 \cosh(\sigma z) + B_3 \sinh(\sigma z)) e^{-z/\alpha} \tag{45}$$

e

$$N(z) = A_1 e^{-\beta z/\alpha} + [A_2 \cosh(k_0 z) + A_3 \sinh(k_0 z)] e^{-z/\alpha}, \tag{46}$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são constantes para  $i = \{1, 2, 3\}$ .

Observemos que os coeficientes de dispersão e convecção  $D_T$  e  $U$ , respectivamente, têm as mesmas características dos coeficientes obtidos por [8], descritos em (38). O que torna a equação diferente são as coordenadas da velocidade da água de  $\mathcal{O}(1)$  e  $\mathcal{O}(\epsilon)$  e a onda da interface de  $\mathcal{O}(1)$ , que foram obtidas com o modelo viscoelástico generalizado. A importância desse resultado se deve ao fato desse modelo ter sido obtido através de um modelo mais realístico visto que ele leva em consideração a dependência dos coeficientes da tensão e deformação da frequência.

## 6 Conclusão

O problema de propagação de ondas de água sobre uma camada de lama fluida viscoelástica foi investigado e a equação que descreve a evolução da concentração de sedimentos, obtida por [8], foi resolvida numericamente para fundos erodíveis e não erodíveis. Comparamos estes resultados com aqueles onde o fundo é rígido [4], unidimensional e com erosão restrita a uma faixa do fundo.

Usando um modelo viscoelástico generalizado para um sistema de duas camadas, obtivemos uma nova equação para a descrição da concentração de sedimentos (43).

Como trabalhos futuros, iremos investigar numericamente a solução dessa nova equação.

## 7 Agradecimentos

Trabalho parcialmente financiado pelo CNPq e CAPES,

J. S. Z. agradece ao BCAM (Basque Center for Applied Mathematics) pela hospitalidade e pelo suporte financeiro parcial. Agradece também ao Dr. Johan Jansson pelo auxílio no trabalho computacional.

## Referências

- [1] P. J. De Wit, Liquefaction of cohesive sediments caused by waves, master thesis, Delft University of Technology, vol. 174, Netherlands, 1995.
- [2] J. P. Y. Maa and A. J. Mehta, Soft mud properties: voight model, *J. Waterway*, vol. 114, 765-770, 1988.
- [3] C.C. Mei and C. Chian, Dispersion of small suspended particles in a wave boundary layer, *American Meteorological Society*, 2479-2495, 1994.
- [4] C. C. Mei, She-jun Fan and Kang-ren Jin, Resuspension and transport of fine sediments by waves, *J. Geophysical Research*, vol. 102, 15.807-15.821, 1997.
- [5] C. C. Mei, M. Krotov, and Z. Huang, A. Huhe, Short and long waves over a muddy seabed, *J. Fluid. Mech.*, vol. 643, 33-58, 2010.
- [6] C. O Ng., Water waves over a muddy bed: a two layer Stokes boundary layer model, *Coastal Engineering*, vol. 40, 221-242, 2000.
- [7] C. O. Ng and X. Zhang, Mass transport in water waves over a thin layer of soft viscoelastic mud, *J. Fluid. Mech.*, vol. 573, 105-130, 2007.
- [8] C. O. Ng and C. H. Wu, Dispersion of suspended particles in a wave boundary layer over a viscoelastic bed, *International Journal of Engineering Science*, vol. 46, 50-65, 2008.
- [9] M. Schläger and Fenics Team, Fenics Project, <http://fenicsproject.org/>, 2013. cited: June, 05, 2013.