

## A distribuição Weibull Exponencial de Zografos

**Patrícia Silva N. Barros,**

PPGBEA - UFRPE / DCE - UFPB

E-mail: patricia.jp1408@hotmail.com

**Kleber Napoleão N. de O. Barros ,**

PPGBEA - UFRPE / DE - UEPB

E-mail: kleber.barros@cct.uepb.br

**Cícero Carlos R. de Brito,      Wilson Rosa de Oliveira Junior**

PPGBEA - UFRPE

E-mail: ciceroCarlosbrito@yahoo.com.br,    wilson.rosa@gmail.com

**Resumo:** *A distribuição Weibull é muito popular para dados em modelagem de vida. Em [3] é apresentada uma introdução a família gama-generalizada de distribuições. Daí tem-se, como proposta, a distribuição Weibull Exponencial de Zografos (WEZ). A WEZ tem a distribuição Weibull, exponencial e Rayleigh como casos particulares. Um tratamento compreensivo das propriedades matemáticas da WEZ é feita, sendo encontradas as expressões para a média, variância, coeficiente de assimetria e curtose e fez-se um ajuste pelo método da máxima verossimilhança. Verificando pela log-verossimilhança que o melhor ajuste foi das estimativas pelo método de máxima verossimilhança. Dessa forma a distribuição Weibull Exponencial de Zografos pode ser utilizada para ajustar dados de análise de sobrevivência.*

**Palavras-chave:** *Distribuição Weibull, Família gama-generalizada, Distribuição Weibull Exponencial de Zografos*

### Introdução

A distribuição Weibull, tendo exponencial e Rayleigh como casos especiais, é uma distribuição muito popular para dados em modelagem de vida. Nos últimos anos, novas classes de distribuições foram propostas com base em modificações da distribuição Weibull para lidar com a taxa de falha em forma de banheira. Uma boa revisão de alguns destes modelos é apresentada por [1].

O artigo [2], propôs a distribuição Beta Weibull Modificada (BWM) que apresentou flexibilidade para acomodar várias formas da função de taxa de falha, por exemplo, forma de U e unimodal, sendo, portanto, muito utilizada em uma variedade de aplicações nas áreas de confiabilidade, Medicina e Biologia, bem como em outras áreas de investigação.

Este artigo tem o objetivo de utilizar a generalização proposta por [3] para generalizar a distribuição Weibull. Pretende-se desenvolver a função densidade de probabilidade, a função de risco, a média, a variância, o coeficiente de assimetria, o coeficiente de curtose e o ajuste pelo método de máxima verossimilhança da nova distribuição: Weibull Exponencial de Zografos.

### Metodologia

A distribuição de Weibull foi proposta originalmente por W. Weibull em estudos relacionados ao tempo de falha devido a fadiga de metais. A distribuição Weibull é uma distribuição proposta para análise de confiabilidade. Ela é uma distribuição muito flexível, e por esta razão, amplamente utilizada. Na maioria dos casos, a função densidade é definida como [4]

$$f(t) = \theta \lambda^\theta t^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta}, 0 < t < \infty$$

Foram desenvolvidas e discutidas várias formas de generalização de distribuições nos últimos anos. Foi introduzida em [3] a família gama-generalizada de distribuições. Definiram a função de distribuição acumulada da gama-generalizada (para  $x \in R$ ) por:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{-\log[\bar{G}(x;\xi)]} t^{\delta-1} e^{-t} dt,$$

em que  $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$  é a função de sobrevivência e  $\Gamma(\delta) = \int_0^\infty x^{\delta-1} e^{-x} dx$  é a função gama.

Neste artigo utilizamos esta forma de generalização para a distribuição Weibull. Desta forma a função de distribuição acumulada da distribuição Weibull Exponencial de Zografos é dada por:

$$F(x) = \int_0^{-\text{Log}(e^{-\beta x})} \lambda \theta (\lambda t)^{\theta-1} e^{-(\lambda t)^\theta} dt$$

$$F(x) = 1 - e^{-(\beta \lambda x)^\theta} \tag{1}$$

em que  $x > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta > 0$  e  $\lambda > 0$ . Neste caso utilizou-se  $\bar{G}(x) = e^{-\beta x}$  que é a função de sobrevivência da Exponencial. Os parâmetros  $\beta > 0$  e  $\theta > 0$  são de forma,  $\lambda > 0$  é o de escala. A função densidade é dada por:

$$f(x) = \beta \theta \lambda (\lambda \beta x)^{\theta-1} e^{-(\beta \lambda x)^\theta} \tag{2}$$

em que  $x > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta > 0$  e  $\lambda > 0$ .

A distribuição Weibull Exponencial de Zografos tem como casos especiais: para  $\beta = 1$  tem-se a distribuição Weibull; para  $\beta = 1$  e  $\theta = 1$  tem-se a distribuição exponencial; e para  $\beta = 1$ ,  $\theta = 2$  e  $\lambda = 1/\sigma$  tem-se a distribuição Rayleigh.

A função de risco é usada para calcular o risco de um dado indivíduo vir a falhar em um dado instante  $t$  e é obtida pela seguinte relação:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

Substituindo  $f(t)$  e  $S(t) = 1 - F(t)$  na expressão anterior pela função densidade de probabilidade e a função de sobrevivência da distribuição Weibull Exponencial de Zografos, a função de risco é dada por:

$$h(x) = \beta \theta \lambda (\lambda \beta x)^{\theta-1} \tag{3}$$

em que  $x > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\theta > 0$  e  $\lambda > 0$ .

É necessário enfatizar a importância e a necessidade dos momentos em qualquer análise estatística especialmente em trabalhos aplicados. Algumas das mais importantes características de uma dada distribuição pode ser estudada através dos momentos: média, variância, coeficiente de assimetria e curtose. Seja  $X$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada pela distribuição Weibull Exponencial de Zografos os quatro primeiros momentos, a média, a variância, o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose são dados, respectivamente, por:

$$\mu = \frac{\Gamma[\frac{1}{\theta}]}{\beta \lambda \theta} \tag{4}$$

$$Var = \frac{\theta^2 \Gamma[\frac{2+\theta}{\theta}] - \Gamma(\frac{1}{\theta})^2}{\beta^2 \lambda^2 \theta^2} \tag{5}$$

$$Assimetria = \frac{\theta^3 \Gamma[\frac{3+\theta}{\theta}] + 2\Gamma[\frac{1}{\theta}]^3 - 6\theta \Gamma[\frac{1}{\theta}] \Gamma[\frac{2}{\theta}]}{\beta^3 \lambda^3 \theta^3 \left( \frac{\theta^2 \Gamma[\frac{2+\theta}{\theta}] - \Gamma[\frac{1}{\theta}]^2}{\beta^2 \lambda^2 \theta^2} \right)^{3/2}} \tag{6}$$

$$Curtose = \frac{\theta^4 \Gamma[\frac{4+\theta}{\theta}] - 3\Gamma[\frac{1}{\theta}] (\Gamma[\frac{1}{\theta}]^3 - 4\theta \Gamma[\frac{1}{\theta}] \Gamma[\frac{2}{\theta}] + 4\theta^2 \Gamma[\frac{3}{\theta}])}{(\theta^2 \Gamma[\frac{2+\theta}{\theta}] - \Gamma[\frac{1}{\theta}]^2)^2} \tag{7}$$

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas seguindo uma WEZ e  $\xi = (\beta, \lambda, \theta)'$ , a função de verossimilhança é expressa como segue:

$$L(\xi) = (\beta\theta\lambda)^n \prod_{i=1}^n (\lambda\beta x_i)^{\theta-1} e^{-\sum_{i=1}^n (\beta\lambda x)^\theta} \tag{8}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é dada por:

$$l(\xi) = \log(L(\xi)) = n\log(\beta\theta\lambda) + (\theta - 1)\log \prod_{i=1}^n (\lambda\beta x_i) - \sum_{i=1}^n (\beta\lambda x)^\theta \tag{9}$$

### Resultados e Discussões

A seguir estão os gráficos da função densidade de probabilidade, a função de risco, a média, a variância, o coeficiente de assimetria e curtose e o ajuste pela função de verossimilhança da distribuição Weibull Exponencial de Zografos.

A Figura 1 ilustra algumas das formas da função densidade de probabilidade e da função de risco com  $\lambda$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\beta$ . Verifica-se que a função densidade tem formas diferentes para cada  $\beta$ , quando  $\beta$  tende a 1 se aproxima da Weibull. A função de risco é crescente para qualquer valor de  $\beta$ , porém quanto maior for o valor atribuído a este parâmetro, maior será o risco.

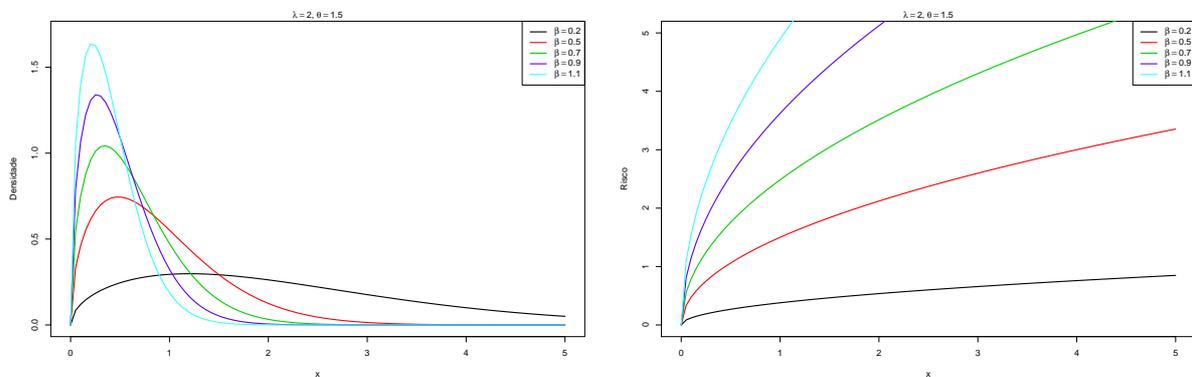


Figura 1: Função densidade de probabilidade e função de risco com  $\lambda$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\beta$

A Figura 2 apresenta a função densidade de probabilidade e a função de risco com  $\beta$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\lambda$ . Observa-se que a função densidade tem a mesma forma diferenciando a escala, quando o  $\lambda$  aumenta a dispersão diminui. O comportamento da função de risco para  $\lambda$  fixo é semelhante ao ocorrido com  $\beta$ , porém com amplitude reduzida.

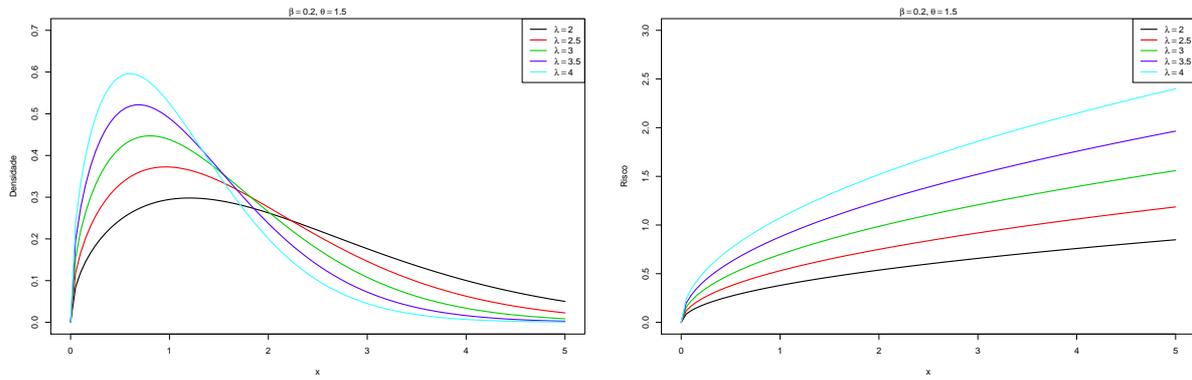


Figura 2: Função densidade de probabilidade e função de risco com  $\beta$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\lambda$

A Figura 3 apresenta a função densidade de probabilidade e a função de risco com  $\beta$  e  $\lambda$  fixos e variando o  $\theta$ . Nota-se que a função densidade tem diferentes formas diferenciando de acordo com o  $\theta$ , quando o  $\theta$  aumenta seu formato se torna simétrico. A função de risco é crescente para qualquer valor de  $\theta$ , no entanto o risco tende a aumentar mais rápido quando o tempo aumenta para valores de  $\theta$  maiores que 2. Um comportamento inverso ocorre para  $\theta < 2$ .

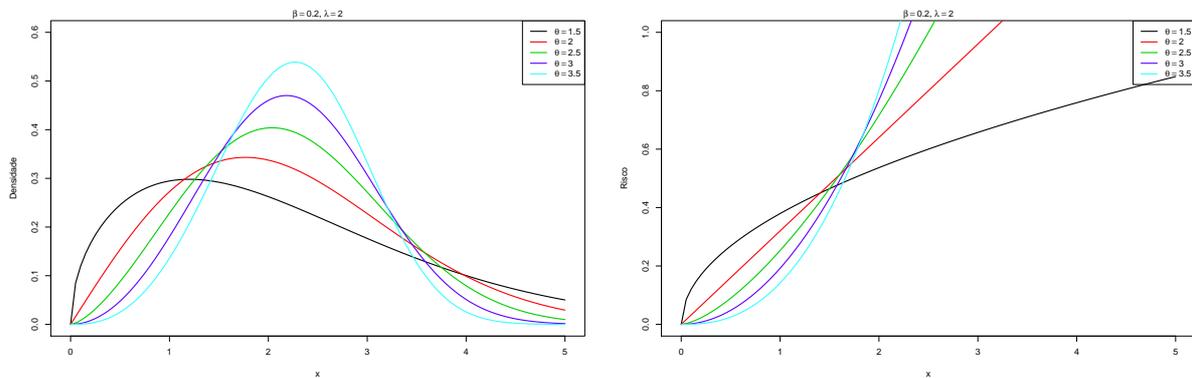


Figura 3: Função densidade de probabilidade e função de risco com  $\beta$  e  $\lambda$  fixos e variando o  $\theta$

A Figura 4 apresenta a média, variância, coeficiente de assimetria e curtose com  $\lambda$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\beta$ . A média decresce e tende a se concentrar na origem quando se aumenta o  $\beta$ . A variância decresce quando o  $\beta$  cresce.

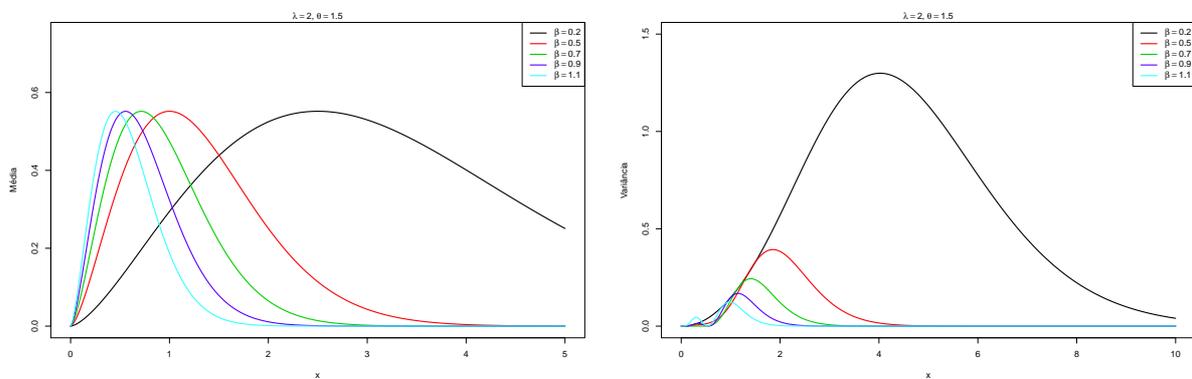


Figura 4: A média e variância com  $\lambda$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\beta$

A Figura 5 apresenta os coeficientes de assimetria e curtose com  $\lambda$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\beta$ . O coeficiente de assimetria e curtose apresentam resultados semelhantes, para um valor fixo de  $x$ , quando o  $\beta$  cresce a assimetria e a curtose diminuem e tendem a se concentrar na origem.

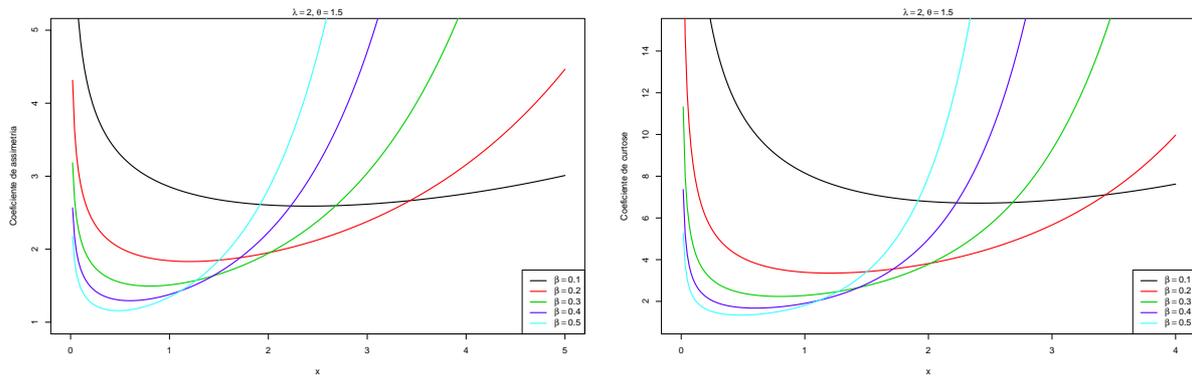


Figura 5: Coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose com  $\lambda$  e  $\theta$  fixos e variando o  $\beta$

Fez-se uma simulação com 100 valores da distribuição WEZ com  $\beta = 1, 2$ ,  $\lambda = 2$  e  $\theta = 1, 5$ . Ajustou-se aos dados a densidade com os parâmetros verdadeiros acima e com sua estimativa de máxima verossimilhança via algoritmo de estimação BFGS. Os estimadores de máxima verossimilhança foram  $\beta = 1, 56$ ,  $\lambda = 1, 56$  e  $\theta = 1, 57$ . A Figura 6 mostra o histograma com o ajuste dos parâmetros e da função de log-verossimilhança da distribuição Weibull Exponencial de Zografos.

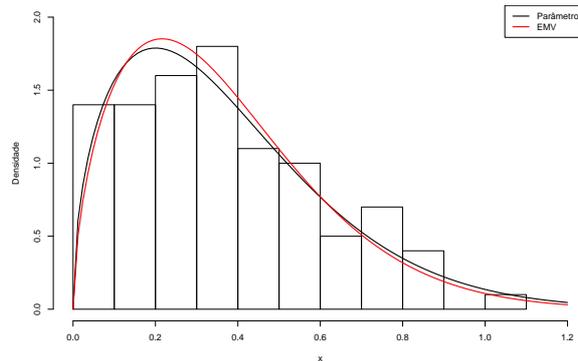


Figura 6: Histograma com ajuste dos parâmetros e da função de log-verossimilhança

Verifica-se que o ajuste das estimativas pelo método de máxima verossimilhança foi melhor do que dos parâmetros estipulados. Para medir qual o melhor ajuste pode-se utilizar a log-verossimilhança que é dada por:

$$l(\xi) = \sum_{i=1}^n \log f(\xi; x_i)$$

O ajuste que obter a maior log-verossimilhança é melhor. Os valores da log-verossimilhança foram 5,79 para os parâmetros estipulados e 5,82 para o ajuste pelo método de máxima verossimilhança. Dessa forma o melhor ajuste foi da estimativa pelo método de máxima verossimilhança. Com isso, conclui-se que a distribuição Weibull Exponencial de Zografos pode ser utilizada para ajustar dados de análise de sobrevivência.

## Conclusões

Neste artigo, foi introduzida a distribuição Weibull Exponencial de Zografos que é uma generalização da distribuição Weibull pelo método introduzido por [3]. Encontrou-se os quatro primeiros momentos: média, variância, coeficiente de assimetria e curtose. Utilizou-se o método da máxima verossimilhança para ajustar os parâmetros da distribuição Weibull Exponencial de Zografos. Verificando pela log-verossimilhança que as estimativas pelo método de máxima verossimilhança teve melhor ajuste. Concluindo que a distribuição Weibull Exponencial de Zografos pode ser utilizada para ajustar dados de análise de sobrevivência.

## Referências

- [1] H. Pham, C-D. Lai. On Recent Generalizations of the Weibull Distribution, *IEEE Transactions on reliability*, vol. 56, no. 3, 2007.
- [2] G. O. Silva, E. M. Ortega, G. M. Cordeiro. The beta modified Weibull distribution. *Lifetime Data Anal.* 3, 409-30, 2003.
- [3] K. Zografos, N. Balakrishnan. On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology.* 6, 344-362, 2009.
- [4] W. Weibull. A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 18, pp. 293-297, 1951.