

Análise Espectral de Sinais Caóticos Gerados pelo Mapa de Bernoulli

Rafael Alves da Costa **Murilo Bellezoni Loiola**

Universidade Federal do ABC, UFABC,

09210-170, Santo André, SP

E-mail: r.costa@ufabc.edu.br, murilo.loiola@ufabc.edu.br,

Marcio Eisencraft

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP,

05508-010, São Paulo, SP

E-mail: marcio@lcs.poli.usp.br.

RESUMO

Nesse trabalho faz-se um estudo das propriedades temporais e espectrais dos sinais caóticos gerados por uma família de mapas lineares por partes, o mapa de Bernoulli [3]. Mais especificamente, obtêm-se fórmulas analíticas para a Sequência de Autocorrelação (SAC) e para a Densidade Espectral de Potência (DEP) do sinais gerados em função do parâmetro dessa família. Abordagem para um mapa com alguma similaridade encontra-se em [4]. O desenvolvimento empregado nesse trabalho é inspirado em [2] e [5].

A família de mapas de Bernoulli é definida por

$$s(n + 1) = f_B(s(n)), \tag{1}$$

em que

$$f_B(s) = \begin{cases} \frac{2}{1+\alpha}s + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, & -1 \leq s < \alpha \\ \frac{2}{1-\alpha}s - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}, & \alpha \leq s \leq 1 \end{cases}, \tag{2}$$

sendo $\alpha \in [-1, 1]$ um parâmetro fixo. Na Figura 1(a) são mostrados gráficos de $f_B(s)$ para diversos valores de α . Os expoentes de Lyapunov dos atratores desses mapas são positivos, como mostrado na Figura 1(b), dessa forma, quase todos os sinais gerados são caóticos. Na Figura 1(c) mostram-se exemplos de sinais gerados, deixando-se explícita a dependência sensível com as condições iniciais, característica dos sinais caóticos [1].

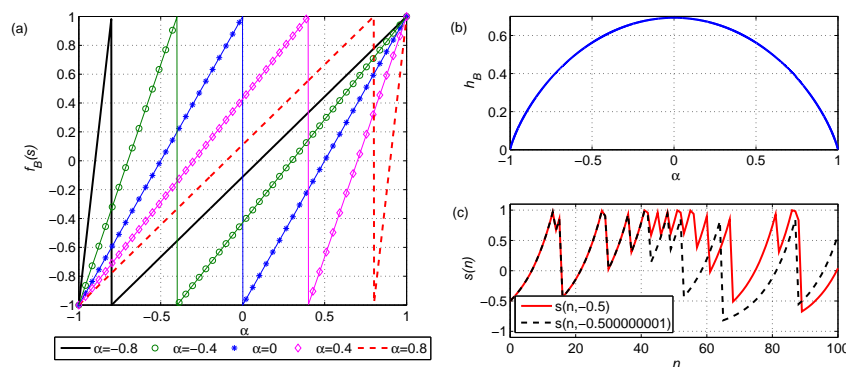


Figura 1: (a) Mapas de Bernoulli para diferentes valores de α , (b) Expoente de Lyapunov do atrator de $f_B(s)$ em função de α e (c) trecho de órbitas de $f_B(s)$ com $s_0 = -0.5$ e $s_0 = -0.500000001$ para $\alpha = 0.8$.

A SAC $R(k) = E[x(n)x(n+k)]$, sendo $E[\cdot]$ o operador valor esperado, pode ser obtida analiticamente seguindo procedimento análogo ao descrito em [2]. Pode-se mostrar que

$$R(k) = \frac{1}{3}\beta^{|k|}, \quad (3)$$

sendo $\beta = \frac{(1+\alpha^2)}{2}$. Para calcular a DEP $S(\omega)$ basta calcular a Transformada de Fourier de Tempo Discreto de $R(k)$, obtendo-se

$$S(\omega) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos(\omega)} \right) \quad (4)$$

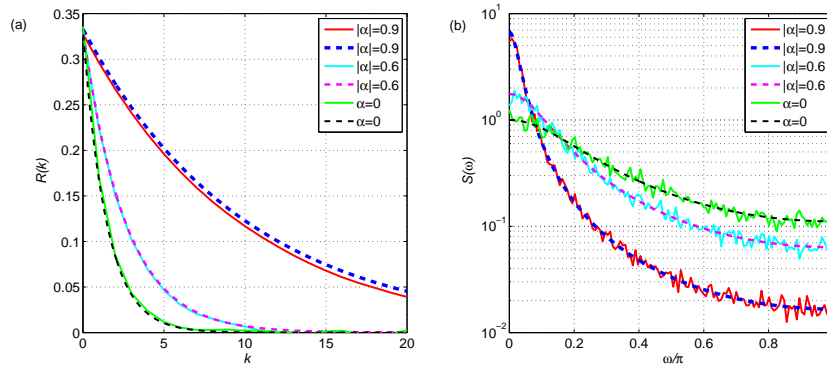


Figura 2: (a) SAC e (b) DEP para sinais do mapa de Bernoulli para alguns valores de $|\alpha|$. Em linha tracejada estão as curvas analíticas e em linha cheia as curvas obtidas via simulação numérica.

Nas Figuras 2(a) e (b) são mostrados gráficos de $R(k)$ e $S(\omega)$ para diversos valores de $|\alpha|$. Em ambos os casos são mostrados os resultados analíticos e numéricos. Nota-se que $R(k)$ decai monotonicamente, aproximando-se da forma impulsiva para $\alpha = 0$, diferentemente do que ocorre com o mapa tenda inclinada estudado em [2]. Esse formato de $R(k)$ faz com que a potência dos sinais esteja concentrada nas baixas frequências para todo $|\alpha|$. Essa concentração aumenta com $|\alpha|$, podendo-se obter sinais de banda estreita para $|\alpha| \approx 1$.

Como continuação desse trabalho, pretende-se obter a banda essencial desses sinais em função de α e do expoente de Lyapunov. Também pretende-se estender esse estudo para mapas lineares por partes mais gerais.

Palavras-chave: *Análise Espectral, Sinais Caóticos, Mapa de Bernoulli*

Referências

- [1] ALLIGOOD, K., SAUER, T., AND YORKE, J. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer, 1997.
- [2] EISENCRAFT, M., KATO, D. M., AND MONTEIRO, L. H. A. Fast communication: Spectral properties of chaotic signals generated by the skew tent map. *Signal Process.* 90, 1 (2010), 385–390.
- [3] LASOTA, A., AND MACKEY, M. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [4] LOPES, A., LOPES, S., AND SOUZA, R. R. On the spectral density of a class of chaotic time series. *Journal of Time Series Analysis* 18, 5 (1997), 465–474.
- [5] SAKAI, H., AND TOKUMARU, H. Autocorrelations of a certain chaos. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on* 28, 5 (Oct. 1980), 588–590.