Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

IMPLEMENTAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES VIA MÉTODO DE MACCORMACK

Jeferson O. Almeida*
MCCT/EEIMVR/UFF. Av. dos Trabalhadores n. 420. Vila Santa Cecília, CEP 27255-125,
Volta Redonda, RJ, Brazil.
E-mail: jefersonosmar@gmail.com

Rodolfo S. M. Freitas*
E-mail: rodolfofreitas@id.uff.br

Diomar Cesar Lobão **
E-mail: lobaodiomarcesar@yahoo.ca

*Alunos mestrando MCCT/EEIMVR/UFF

** Professor Orientador MCCT/EEIMVR/UFF

INTRODUÇÃO

O estudo e a análise numérica das equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis em geometrias bidimensionais são de grande importância, pois estas equações representam fenômenos envolvendo escoamentos de altas e baixas velocidades. A discretização e implementação das equações são em coordenadas generalizadas (ξ, η) via métodos numéricos, pois são geradas métricas que relacionam o sistema físico com o sistema computacional, gerando uma malha estruturada coincidente com a fronteira do domínio [1],[2].

Existem vários métodos de geração de malhas, entretanto o método baseado na solução de equações diferenciais parciais elípticas é utilizado, pois gera malhas adaptáveis em regiões complexas e possuem facilidade no controle da concentração de linhas coordenadas em regiões de interesse. Serão utilizados e analisados dois tipos de malhas: Single-Block e Multi-Block [2].

Existem diversos métodos numéricos para a resolução das equações de Navier-Stokes. Para obtenção de soluções dependentes do tempo, existem os métodos explícitos, que normalmente requerem menos trabalho computacional e são mais simples, e os métodos implícitos, que possuem um custo computacional maior, entretanto possuem limites de estabilidades menos rigorosos.

Assim, será utilizado para a resolução o Método Original de MacCormack [3], que é um método explícito bastante simples de ser implementado, entretanto possui limites de estabilidades mais rigorosos.

MÉTODO DE MacCORMACK

As equações de Navier-Stokes para escoamento compressível em coordenadas generalizadas em 2D são das por

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} = 0$$

onde os vetores $\mathbf{Q}, \mathbf{E} e \mathbf{F}$ são dados por,

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p\xi_x - Re^{-1}(\tau_{xx}\xi_x + \tau_{xy}\xi_y) \\ \rho v U + p\xi_y - Re^{-1}(\tau_{xy}\xi_x + \tau_{yy}\xi_y) \\ (E_t + p)U - Re^{-1}(\beta_x\xi_x + \beta_y\xi_y) \end{bmatrix} e \ \mathbf{F} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + p\eta_x - Re^{-1}(\tau_{xx}\eta_x + \tau_{xy}\eta_y) \\ \rho v V + p\eta_y - Re^{-1}(\tau_{xy}\eta_x + \tau_{yy}\eta_y) \\ (E_t + p)V - Re^{-1}(\beta_x\eta_x + \beta_y\eta_y) \end{bmatrix}$$

sendo J o Jacobiano da transformação, ρ a densidade, u e v as velocidades variantes no domínio físico, E_t a energia total, U e V as velocidades contravariantes, que são dadas por

$$U = \xi_x u + \xi_y v \ \text{ e } \ V = \eta_x u + \eta_y v$$

onde ξ_x, ξ_y, η_x e η_y são métricas da transformação de coordenadas.

Aplicando o Método Original de MacCormack, as equações de Navier-Stokes para escoamento compressível em 2D [1] são escritas em dois estágios explícitos dados por:

1° Previsor

$$\mathbf{Q}_{i,j}^{*} = \mathbf{Q}_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi}\left(\mathbf{E}_{i+1,j}^{n} - \mathbf{E}_{i,j}^{n}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta \eta}\left(\mathbf{F}_{i,j+1}^{n} - \mathbf{F}_{i,j}^{n}\right)$$

2° Corretor

$$\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{Q}_{i,j}^{n} + \mathbf{Q}_{i,j}^{*} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi}\left(\mathbf{E}_{i,j}^{*} - \mathbf{E}_{i-1,j}^{*}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta \eta}\left(\mathbf{F}_{i,j}^{*} - \mathbf{F}_{i,j-1}^{*}\right)\right]$$

Para manter o esquema numérico estável, o valor do passo de integração temporal pode ser definido pela seguinte fórmula empírica em coordenadas generalizadas,

$$\Delta t = \frac{CFL}{\left(\frac{2v}{Re} + CFx + CFy\right)}$$

onde CFL é o número de Courant-Friedrichs-Lewy e CFx e CFy são dados por,

$$CFx = \left|\xi_x u + \xi_y v\right| + \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$$

$$CFy = \left|\eta_x u + \eta_y v\right| + \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$$

DISCUSSÕES

Com a aplicação do Método de MacCormack para equações de Navier-Stokes para escoamento compressível em 2D, foram utilizadas as malhas do tipo Single-Block e Multi-Block. Para geometrias mais simples, a utilização da malha do tipo Single-Block gera resultados satisfatórios. Entretanto, para geometrias mais complexas é necessária a utilização de malhas do tipo Multi-Block.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] D.A. Anderson, J.C. Tannehill and R.H. Pletcher, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, McGraw Hill, New York. 1984.

[2] C.R. Maliska, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional - 2ª edição", LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2004.

[3] R.W., MacCormack, The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering, *AIA,* Paper 69-354, 1969.

[4] G. Biswas, M. Breuer, F. Durst, Backward-Facing Step Flows for Various Expansion Ratios at Low and Moderate Reynolds Numbers, *Journal of Fluids Engineering*, Paper 362-374, 2004.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0280