

## Métodos Híbridos de Alta Ordem para Escoamentos Compressíveis

**Vitor Alves Pires\***      **Maria Luísa B. de Oliveira**  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC, USP,  
13566-590, São Carlos, SP  
E-mail: vitoralp@icmc.usp.br, marialuisa@icmc.usp.br

### RESUMO

A solução numérica de escoamentos compressíveis em velocidades altas pode exigir um custo computacional alto com a utilização de malhas bastante refinadas e passos de tempo pequenos, já que a presença de ondas de choque e vórtices de pequena escala exigem métodos numéricos mais sofisticados para simular o escoamento e calcular as derivadas espaciais discretas [3, 5, 6].

Alguns desses métodos produzem resultados adequados para regiões de funções com pouca variação em sua quantidade, sendo estas denominadas regiões com função suave, embora os mesmos não possam ser utilizados em regiões que apresentam funções com descontinuidades, uma vez que produzem oscilações espúrias [5]. Dessa forma, outros métodos numéricos foram desenvolvidos para solucionar esse tipo de problema, apresentando bom desempenho para regiões com função descontínua [3, 6]. Porém, estes apresentam termos de alta dissipação, podendo acarretar problemas quando aplicados em regiões com função suave.

Assim, para evitar os problemas encontrados, diversos métodos foram adaptados ou desenvolvidos [1, 2, 4, 7]. Mesmo assim, estes ainda possuem algumas limitações que não permitem aplicações de uma forma geral, como a necessidade de definir um valor limite para a separação das regiões. Alguns desses métodos podem ser caracterizados como híbridos, em que dois métodos com características ideais para cada região são combinados através de uma função detectora, cujo principal objetivo é avaliar numericamente a variação de uma quantidade em uma região através de fórmulas que envolvem derivadas.

Um método híbrido é construído como

$$Híbrido = \sigma MS + (1 - \sigma)MD, \quad (1)$$

onde  $\sigma$  é a função detectora. Além disso,  $MS$  representa um método ideal para região com função suave e  $MD$  para a região com função descontínua.

O principal objetivo é desenvolver um novo método numérico híbrido de ordem alta que seja capaz de se adaptar automaticamente a cada tipo de problema, permitindo a solução numérica de escoamentos compressíveis em velocidades altas com maior qualidade e com custo computacional relativamente baixo. Além disso, é necessário que seja capaz de amortecer somente oscilações espúrias e tratar precisamente as ondas de choque.

Assim, foi realizada uma revisão bibliográfica de diversos métodos numéricos híbridos existentes, dentre aqueles apresentados por Adams [1], Hill [2] e Kim [4]. Dessa maneira, foi possível avaliar o desempenho dos detectores de descontinuidades para diferentes funções  $f$ , analisando as principais vantagens e desvantagens de cada um.

O detector de Adams [1] é aplicado com os métodos Compacto [5] e ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) [6], apresentando um indicador de suavidade simples, baseado no cálculo da primeira derivada discreta,  $|\Delta f_{i+1}| = |f_{i+1} - f_i|$ , e sua comparação com as derivadas da vizinhança utilizando sentenças lógicas.

---

\*bolsista de Mestrado CAPES

Para evitar o uso de sentenças lógicas e melhorar o custo computacional, o indicador de suavidade de Kim [4] realiza a comparação entre as derivadas em uma única expressão,

$$\frac{|2\Delta f_{i+1}\Delta f_i| + \varepsilon}{|\Delta f_{i+1}|^2 + |\Delta f_i|^2 + \varepsilon}, \quad (2)$$

onde  $\varepsilon$  é um real positivo para evitar divisão por zero, além de considerar mais pontos na vizinhança com a intenção de definir a região com função descontínua. Este é aplicado com os métodos WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) [3] e diferenças centrais.

Apesar dos significantes avanços apresentados por Kim [4], seu detector apresenta problemas, identificando algumas regiões com função suave como sendo descontínuas. O detector desenvolvido por Hill [2], utilizando os métodos WENO e diferenças centrais para realizar a combinação do método híbrido, considera o próprio indicador de suavidade do método WENO, aplicando primeira e segunda derivadas discretas da função  $f$ , para identificar as regiões com função suave e descontínua corretamente. No entanto, este indicador apresenta um custo computacional alto que desejamos evitar no novo método.

O desempenho de cada detector de descontinuidades foi avaliado considerando algumas funções unidimensionais e sua aplicação na resolução das equações de advecção e Euler, uma vez que diferentes combinações no método híbrido podem influenciar no desempenho da solução obtida. Foram consideradas funções unidimensionais suaves e com presença de descontinuidades.

O novo método foi aplicado inicialmente na resolução da equação de advecção e das equações de Euler unidimensionais, verificando assim seu desempenho. Em seguida, foi adaptado para o caso bidimensional, e está atualmente sendo validado para casos simples.

Com o propósito de analisar a eficiência do método em um problema bidimensional mais complexo, será simulado o escoamento em torno de um cilindro resolvendo numericamente as equações de Navier-Stokes. Para o escoamento ao redor do cilindro serão considerados os casos subsônico e supersônico, em que o regime é totalmente laminar.

**Palavras-chave:** *Métodos Híbridos, Cilindro, Navier-Stokes, WENO, Compacto*

## Referências

- [1] Adams, N. A.; Shariff, K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *Journal of Computational Physics*, v.127, p. 27-51, 1996.
- [2] Hill, D.J.; Pullin, D. I. Hybrid tuned center-difference-WENO method for large eddy simulations in the presence of strong shocks. *Journal of Computational Physics*, v. 194, p. 435-450, 2004.
- [3] Jiang, G. S.; Shu, C. W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, v. 126, p. 202-228, 1996.
- [4] Kim, D.; Kwon, J. H. A high-order accurate hybrid scheme using a central flux scheme and a WENO scheme for compressible flowfield analysis. *Journal of Computational Physics*, v. 210, p. 554-583, 2005.
- [5] Lele, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, v. 103, p. 16-42, 1992.
- [6] Shu, C. W.; Osher, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, v. 77, p. 439-471, 1988.
- [7] Yee, H. C.; Sandham, N. D.; Djomehri, M. J. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristics-based filters. *Journal of Computational Physics*, v. 150, p. 199-238, 1999.