Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Uma aplicação da Extrapolação de Richardson*

Gustavo B. Vieira† **Denismar A. Nogueira**
Instituto de Ciências Exatas, ICEx, UNIFAL-MG,
37130-000, Alfenas, MG
E-mail: gborgesvieira@gmail.com, denismar@unifal-mg.com.br

RESUMO

Em muitos processos numéricos fazem-se aproximações da forma $M - N(h) = K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$, em que M é um valor desconhecido, $K_1, K_2, K_3, \ldots$, são constantes conhecidas e $N(h)$ é uma aproximação de M que depende de h. Isso sugere que quanto menor for o valor de h, e quanto maior for o índice n, para o qual $K_i = 0$, quando $i \leq n$, melhor será a aproximação de M, como afirmam em [1]. O valor de n é conhecido como a ordem da aproximação.

A forma acima de aproximação é conhecida como Extrapolação de Richardson, e é capaz de aumentar a ordem de fórmulas para obter aproximações mais eficientes. Nesse processo, h é denominado passo, e este valor pode ser alterado sem que se altere o valor de M, dessa forma, as aproximações são feitas admitindo valores de h cada vez menores, de forma que se combinem as fórmulas de M para gerar aproximações de ordem cada vez maior.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma aplicação da Extrapolação de Richardson em um método numérico para auxiliar na aproximação de zeros de funções. Esta aplicação foi desenvolvida em um projeto de Iniciação Científica cujo o título é Integração numérica em várias variáveis e o Método Monte Carlo, no qual são feitos estudos de alguns processos numéricos.

A metodologia consistiu no desenvolvimento de algoritmo computacional em linguagem R para a obtenção de aproximações numéricas. Nesse trabalho foi aplicado o método para a aproximação de derivadas, a partir da fórmula de diferença centrada na equação apresentada por [1] na aproximação de $M = f'(x_0)$ obtém-se:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \cdots$$

A fórmula de $N_i(h)$ para aproximar a derivada acima é dada por:

$$N_1(h) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)]$$

Substituindo h por $\frac{h}{2}$ em $N_1(h)$ o valor de $f'(x_0)$ será:

$$f'(x_0) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24}f'''(x_0) - \frac{h^4}{1920}f^{(5)} - \cdots$$

Para prosseguir, é preciso fazer as combinações necessárias para eliminar o termo que contém h^2. Subtraindo a primeira fórmula de $f'(x_0)$ desta segunda fórmula multiplicada por 4. Assim,

*O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

†Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq.

$$3f'(x_0) = 4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) + \frac{3h^4}{480}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

Dividindo a fórmula por 3, ficará:

$$f'(x_0) = \frac{1}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] + \frac{h^4}{480}f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

Desse modo,

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)}{3}.$$

Dando continuidade a esse procedimento, será obtido para cada iteração $i = 2, 3, 4, \ldots$ uma aproximação da ordem de $2i$. Para implementar o algoritmo em linguagem R foi preciso chegar na fórmula geral destas combinações. Dessa forma, a expressão geral para $N_i(h)$ será:

$$N_i(h) = N_{i-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{i-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{j-1}(h)}{4^{i-1} - 1}$$

Uma das aplicações deste método é o cálculo aproximado de derivadas de funções cujas expressões são complicadas e que necessitam de grande precisão. Este resultado pode ser usado no Método de Newton-Raphson, como afirmam em [2], para aproximação de zeros de funções que tem a forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

em que x_0 é uma aproximação da solução da equação $f(x) = 0$.

Sendo assim, ao se aproximar os zeros de funções que possuem expressões complicadas através do método de Newtow-Raphson, utilizando a Extrapolação de Richardson, não será necessário o cálculo analítico de sua derivada. O resultado foi o desenvolvimento de um algoritmo em linguagem R com agilidade e precisão na aproximação de derivadas de funções para utilização neste método que aproximam zeros de funções, uma vez que o desenvolvimento de métodos para o cálculo formal de derivadas é de difícil implementação, mesmo em uma linguagem que permita cálculos algébricos, o que não é possível em linguagem R. Portanto, facilitar a aproximação numérica de zeros de funções com agilidade e precisão é fundamental nesse tipo de cálculo.

Palavras-chave: *Extrapolação, Aproximação Numérica, Derivada*

Referências

[1] L.B. Burden, J.D. Faires “Análise Numérica”, Cengage - Learning, São Paulo, 2008.

[2] M.A.G. Ruggiero, V.L.R. Lopes “Cálculo Numérico, aspectos teóricos e computacionais”, Pearson, São Paulo, 1996.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0293