

Aplicação de técnicas de análise numérica a um modelo de escoamento de água em áreas amazônicas alagáveis

Thiago F. Leal

PPGEM - UERJ, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ
IFRJ, 26600-000, Paracambi, RJ
E-mail: thiago franco@ime.uerj.br

Denise B. Duczmal

ICEX - Universidade Federal de Minas Gerais
31270-010, Belo Horizonte, MG
E-mail: burgarelli@ufmg.br

Cassia I. G. Silva

IC - UFF, 24210-240, Niterói, RJ
IFRJ, 26600-000, Paracambi, RJ
E-mail: cassiaisac@ic.uff.br

Carlos A. de Moura

IME - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
20550-900, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: demoura@ime.uerj.br

Resumo: O ecossistema amazônico sofre sazonalmente com alterações em seu ciclo hidrológico, ocasionando o alagamento de vastos trechos de floresta. Esse processo, entretanto, é fundamental para a manutenção de ciclos naturais. Compreender a dinâmica dessas áreas, portanto, possibilita antecipar o efeito de ações não sustentáveis. Sob tal motivação, este trabalho estuda um modelo de escoamento em áreas amazônicas alagáveis, fundamentado com as equações de Navier-Stokes. Para a obtenção do problema discreto é utilizado o Método dos Volumes Finitos. Emprega-se o Método Marker and Cell para solução das equações de Navier-Stokes. Além disso, a estrutura de dados Autonomous Leaves Graph, que traz recursos adaptativos em sua formulação, é a ferramenta empregada para simular o domínio do problema. Com isso, propõe-se observar, em experimentos preliminares, as direções do campo de velocidades da água que flui entre os troncos da floresta inundada, abrindo espaço para a avaliação de outras características do escoamento.

1. Introdução

A Amazônia é a maior floresta tropical do mundo, cujo território extravasa as fronteiras políticas do Brasil, estendendo-se da Cordilheira dos Andes até o Oceano Atlântico. Apresenta rica biodiversidade e todas as relações no ecossistema procedem com total harmonia.

O índice pluviométrico na região, elevado na maior parte do ano, é influenciado por fenômenos como o vapor d'água proveniente do Oceano Atlântico em direção à Cordilheira dos Andes, o processo de evapotranspiração, que é o retorno à atmosfera da umidade não aproveitada pela vegetação, além do próprio degelo decorrente do verão andino. Somados, esses fatores geram ciclos de precipitação sobre a floresta, alimentando as nascentes e os afluentes dos principais rios da bacia amazônica.

O aumento do volume de água e a oscilação do regime de chuvas fazem com que os rios transbordem e inundem grandes extensões da floresta. A amplitude de variação do nível da água dos rios pode chegar a 16 metros em algumas áreas. Ecologistas da Amazônia denominam essas variações previsíveis como pulso de inundação.

A água que circula nos trechos de floresta alagada transporta sedimentos e material orgânico para outros locais, contribuindo para a redistribuição de nutrientes e energia. Isto constitui um processo fundamental para a floresta, nutrindo a vegetação e disseminando sementes, o que favorece decisivamente a manutenção da cobertura vegetal.

Além dos benefícios ecológicos, os alagamentos anuais têm importante papel sócio-econômico. A população ribeirinha, em sua quase totalidade, sobrevive dos processos de extrativismo e exploração da biomassa animal, sobretudo de peixes e crustáceos, que ali se reproduzem e desenvolvem. Além disso, no período de retorno da água ao nível normal, a matéria orgânica diluída na água, proveniente da parte mais elevada na mata, se deposita no solo propiciando a agricultura de subsistência.

2. Modelo de escoamento

Neste trabalho, temos o interesse em examinar técnicas a serem empregadas em um modelo de escoamento, baseado nas equações de Navier-Stokes de *momentum* e da continuidade. A formulação bidimensional do problema pode ser descrita em notação vetorial como segue, sendo (1) a equação do *momentum* e (2) a equação da continuidade:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U} + F \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = F_m \quad (2)$$

onde \vec{U} representa o vetor velocidade e suas componentes expressam a informação referente a cada eixo coordenado, ρ a densidade do fluido, μ a viscosidade, p a pressão, F a fonte de movimento e F_m fonte de massa. Os operadores exibidos estão em sua forma usual.

Assim, em coordenadas cartesianas e seguindo as considerações descritas em [4]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1(a))$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1(b))$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Não serão consideradas forças externas atuando sobre o escoamento, o que justifica a ausência dos termos fonte nas equações (1(a-b)) e (3). O fator $\eta = \frac{\mu}{\rho}$ representa a viscosidade cinemática.

Considerando, com boa aproximação, o escoamento como incompressível, é possível reescrever os termos convectivos das equações (1(a-b)) fazendo:

$$uu_x + vu_y \Rightarrow (u^2)_x + (uv)_y$$

$$uv_x + vv_y \Rightarrow (uv)_x + (v^2)_y$$

As equações (1(a-b)), então, podem ser escritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} - \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4(a))$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} - \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4(b))$$

e será esta a notação adotada a partir deste ponto.

3. Abordagem numérica

Para o tratamento numérico das equações, foi utilizado o Método MAC (*Marker and Cell*), proposto por [3], que é um esquema explícito para a solução das equações de Navier-Stokes. É normalmente implementado sobre uma malha deslocada (em inglês, *staggered grid*), onde as variáveis do escoamento não são armazenadas na mesma posição. A saber, em cada célula de centro (i, j) , são armazenadas:

- i. A pressão p em seu centro;
- ii. A componente u da velocidade nas faces laterais;
- iii. A componente v da velocidade nas faces superior e inferior.

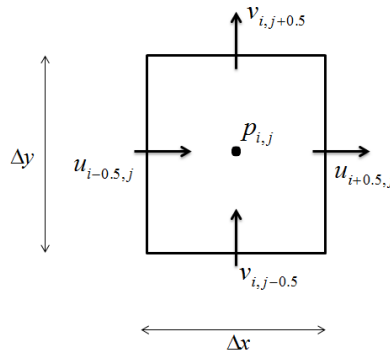


Figura 1: Célula computacional em uma malha deslocada.

Os termos envolvendo velocidades são discretizados no passo n , enquanto aquele que envolve a pressão é discretizado no passo $n+1$. Após o cálculo de u^{n+1} e v^{n+1} , todas as variáveis do escoamento terão avançado no tempo.

A equação do *momentum*, na direção x , tem sua forma discreta obtida sobre o ponto $(i+0.5, j)$, utilizando as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i+0.5,j} &= \frac{u_{i+0.5,j}^{n+1} - u_{i+0.5,j}^n}{\Delta t} & \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i+0.5,j} &= \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial u^2}{\partial x} \right|_{i+0.5,j} &= \frac{(u^2)_{i+1,j} - (u^2)_{i,j}}{\Delta x} & \left. \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right|_{i+0.5,j} &= \frac{(uv)_{i+0.5,j+0.5} - (uv)_{i+0.5,j-0.5}}{\Delta y} \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i+0.5,j} &= \frac{u_{i-0.5,j} - 2u_{i+0.5,j} + u_{i+1.5,j}}{(\Delta x)^2} & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i+0.5,j} &= \frac{u_{i+0.5,j+1} - 2u_{i+0.5,j} + u_{i+0.5,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

Assim, substituindo essas expressões em (4(a)) e efetuando simplificações, temos:

$$u_{i+0.5,j}^{n+1} = F_{i+0.5,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) \tag{5}$$

onde

$$\begin{aligned} F_{i+0.5,j}^n &= u_{i+0.5,j}^n + \Delta t \left[-\frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\Delta x} - \frac{(uv)_{i+0.5,j+0.5} - (uv)_{i+0.5,j-0.5}}{\Delta y} \right] + \\ &+ \Delta t \left[\eta \left(\frac{u_{i-0.5,j} - 2u_{i+0.5,j} + u_{i+1.5,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+0.5,j+1} - 2u_{i+0.5,j} + u_{i+0.5,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

é um termo que depende apenas da velocidade, na direção x , no passo de passo n .

Seguindo este padrão, é possível adaptar o processo à direção y , desta vez sobre $(i, j + 0.5)$, obtendo:

$$v_{i,j+0.5}^{n+1} = G_{i,j+0.5}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) \quad (6)$$

sendo $G_{i,j+0.5}^n$ um termo que depende apenas da velocidade no passo n , a saber,

$$G_{i,j+0.5}^n = v_{i+0.5,j}^n + \Delta t \left[-\frac{(v^2)_{i,j+1} - (v^2)_{i,j}}{\Delta y} - \frac{(uv)_{i+0.5,j+0.5} - (uv)_{i-0.5,j+0.5}}{\Delta x} \right] + \Delta t \left[\eta \left(\frac{v_{i,j-0.5} - 2v_{i,j+0.5} + v_{i,j+1.5}}{(\Delta y)^2} + \frac{v_{i-1,j+0.5} - 2v_{i,j+0.5} + v_{i+1,j+0.5}}{(\Delta x)^2} \right) \right]$$

Nesta etapa da abordagem, as velocidades ainda não respeitam o princípio da conservação de massa modelado pela equação da continuidade. A solução numérica das equações de Navier-Stokes passa, portanto, pela imposição da restrição global $\nabla U = 0$ a cada passo de tempo. Para tal, o método envolve o cálculo da pressão em cada célula (i, j) . A forma discreta da equação da continuidade, no nível de passo $n+1$, é escrita como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j}^{n+1} = \frac{u_{i+0.5,j}^{n+1} - u_{i-0.5,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+0.5}^{n+1} - v_{i,j-0.5}^{n+1}}{\Delta y} = 0$$

Através da substituição de (5) e (6) na expressão acima, tem-se:

$$\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{F_{i+0.5,j}^n - F_{i-0.5,j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+0.5}^n - G_{i,j-0.5}^n}{\Delta y} \right)$$

Esta expressão é a forma discreta de uma Equação de Poisson em p , no instante $n+1$, onde:

$$b = b(i, j) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{F_{i+0.5,j}^n - F_{i-0.5,j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+0.5}^n - G_{i,j-0.5}^n}{\Delta y} \right)$$

A estratégia consiste em escrever esta equação para todos os pontos do domínio computacional, gerando um sistema de equações lineares $A\bar{p} = \bar{b}$, onde \bar{b} e \bar{p} guardam os valores $b(i, j)$ e da pressão, respectivamente, em cada célula.

Solucionando numericamente este sistema, é possível substituir p^{n+1} em (5) e (6), a fim de atualizar os valores de $u_{i+0.5,j}^{n+1}$ e $v_{i,j+0.5}^{n+1}$, avançando todas as variáveis do escoamento no tempo.

São necessários, ainda, alguns ajustes nos valores das variáveis com base no valor do divergente em cada volume de controle, a fim de determinar um campo de velocidades que satisfaça, simultaneamente, as equações de conservação da massa e de conservação do momento, dentro dos limites dos erros das discretizações e arredondamentos nos cálculos. Este procedimento é adequadamente descrito em [3].

3. Abordagem computacional

3.1 Autonomous Leaves Graph (ALG)

O ALG é uma estrutura de dados baseada em grafos proposta em [2] como ferramenta para manipulação adaptativa de malhas não uniformes e auxílio na resolução numérica de EDP's. Em cada passo da execução do algoritmo, uma determinada região da malha sofre um refinamento ou desrefinamento, de acordo com o objetivo do estudo ou comportamento da solução do modelo em questão. A descrição e as ilustrações utilizadas nesta seção foram extraídas de [1].

Para descrever o procedimento usado pelo ALG, considere inicialmente um domínio bidimensional formado por um quadrado unitário, como ilustrado na Figura 2. Dividindo este quadrado em quatro quadrados iguais obtêm-se quatro células, cujos centros são assinalados com um vértice preto. É possível esboçar este esquema por meio de um grafo. Por meio de arestas, cada vértice preto apontará para quatro direções, denotadas por Norte (N), Sul (S), Leste (L) e Oeste (O), cada qual apontando para um vértice branco, inserido com o propósito de conectar níveis de refinamento diferentes.

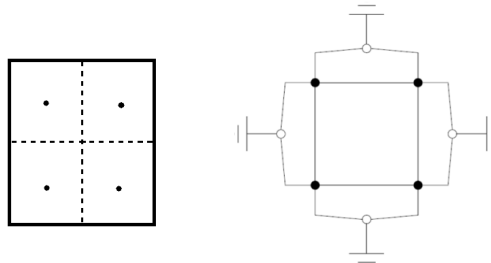


Figura 2: Subdivisão de células e construção do grafo.

Subdividindo um dos quadrados, será substituído por um novo cacho com quatro vértices, todos indexados com o número 2, indicando o nível de refinamento destes vértices, como ilustrado na Figura 3 abaixo. Este procedimento é, então, repetido sobre determinadas células ou regiões da malha, de acordo com a configuração de refinamento que se deseja obter.

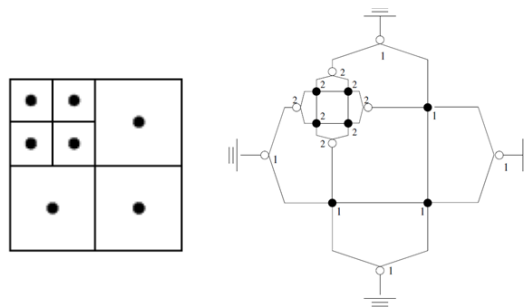


Figura 3: Refinamento nível 2

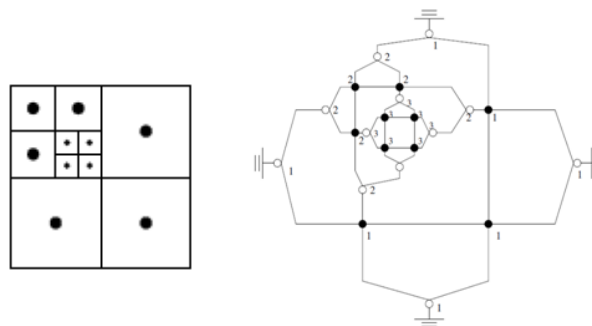


Figura 4: Refinamento de nível 3

3.2 Domínio

O domínio de observação do problema é, portanto, um quadrado unitário, representando a superfície do escoamento. Foi utilizada a configuração de um canal, com fronteiras acima (Norte) e abaixo (Sul) da região simulando paredes de contenção para o escoamento, além das fronteiras de entrada e saída do fluxo, que segue no sentido Oeste-Leste. Uma estrutura aproximadamente circular foi inserida no centro do domínio para simular a presença de um tronco, servindo de obstáculo ao escoamento. Esquemáticamente, tem-se:

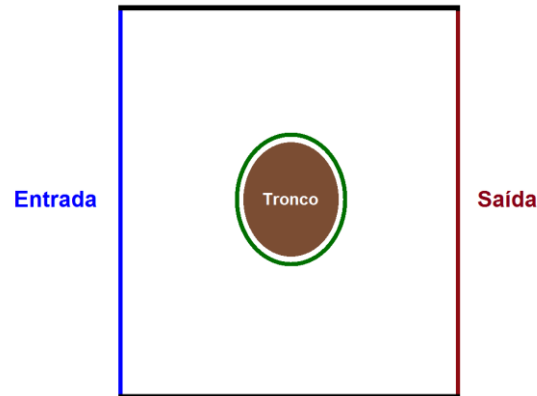


Figura 5: Domínio de observação do problema.

Computacionalmente, toda a região ilustrada na Figura 5 é representada por uma malha construída pelo ALG. As células da malha que correspondem ao círculo verde recebem as mesmas condições de contorno estabelecidas nas fronteiras Norte e Sul do domínio, a fim de que configure efetivamente um obstáculo. Já as células que estão dentro desta borda são inativas, indicando a impossibilidade de serem usadas nos cálculos.

As condições de contorno consideradas são:

- Fronteira Oeste (Entrada): $u = 10, v = 0, p = 1$
- Fronteira Leste (Saída): $u_x = 0, v_y = 0, p_x = p_y = 0$
- Fronteiras Norte, Sul e tronco: $u = 0, v = 0, p = 0$

4. Resultados

Para o problema estudado, o ALG executa a sequência de operações abaixo:

Entrada: Condições iniciais e de contorno;

Refinamento inicial;

Para $t < t_{final}$:

Enquanto (solução não converge)

Calcula pressão;

Calcula velocidades;

Ajusta pressão;

Ajusta velocidades.

Fim enquanto;

Fim para.

Na Figura 6 abaixo tem-se a representação do campo de direções do vetor velocidade em cada célula da malha. Esta informação é obtida a partir da média entre a velocidade na direção x e a velocidade na direção y . Vale ressaltar que este resultado não traduz a intensidade das

velocidades, mas, apenas, a direção. Os vetores foram formatados de modo que tivessem origem no centro de cada célula e ficassem contidos dentro das mesmas.

Na Figura 6 (a), para delimitar a borda do tronco foram marcadas em verde as células que estão a um raio de 0.1 da célula (0.5, 0.5), isto é, do centro do quadrado que demarca o domínio. Já na Figura 6 (b), os troncos têm raio 0.07 e estão centrados em (0.5, 0.25) e (0.5, 0.75). As células nestas bordas são os troncos propriamente ditos. Os círculos internos são apenas ilustrativos e estão sobrepostos a células inativas.

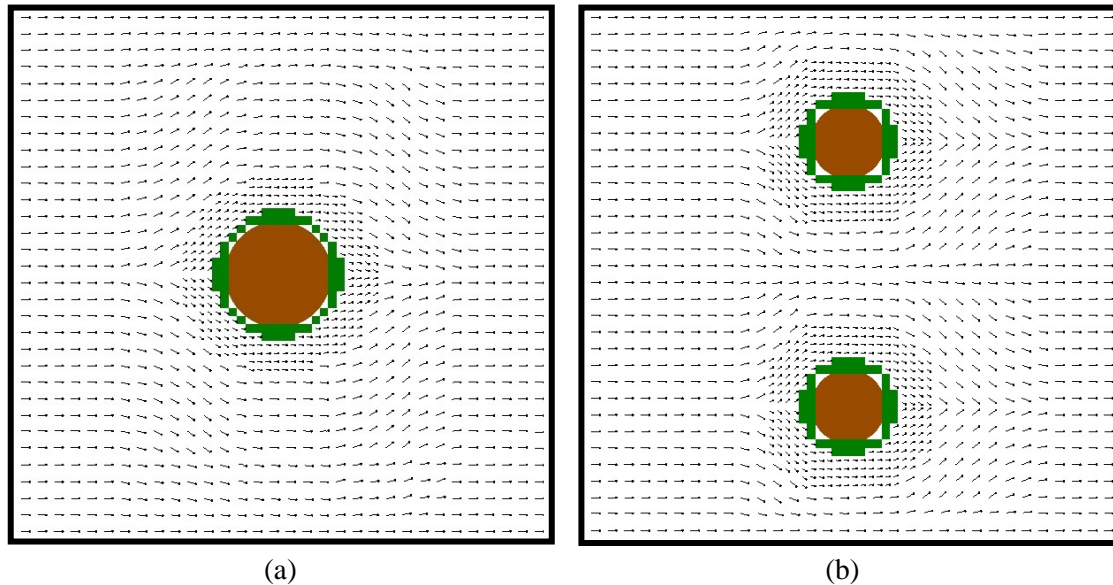


Figura 6: Simulação com um tronco (a) e dois troncos (b) como obstáculos ao escoamento.

O critério de convergência utilizado é referente a diferenças entre os valores das variáveis, em passos de tempo consecutivos, que devem ser menores que um erro previamente estabelecido.

A estimativa dos valores da pressão no escoamento, bem como a representação das intensidades das variáveis, serão alvo de trabalhos futuros.

Referências

- [1] BURGARELLI, D.; “Modelagem computacional e simulação numérica adaptativa de equações diferenciais parciais evolutivas aplicadas a um problema termoacústico”. Tese de doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 1998.
- [2] BURGARELLI, D., KISCHINHEVSKY, M., BIEZUNER, R. J.; “A new adaptive mesh refinement strategy for numerically solving evolutionary PDEs”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 196, páginas 115-131, 2006.
- [3] FORTUNA, A. O.; “Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos, Conceitos Básicos e Aplicações”, Edusp, 2000.
- [4] KRITZ, M. V.; DIAS, C. M.; SILVA, J. M.; “Modelos e Sustentabilidade nas Paisagens Alagáveis Amazônicas”; *Notas em Matemática Aplicada*, V.34, SBMAC, 2008.
- [5] LEAL, T. F.; “Simulação numérica do escoamento de água em áreas alagáveis da floresta amazônica com a utilização da estrutura de dados *Autonomous Leaves Graph*”, Dissertação de Mestrado em Ciências Computacionais, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2013.
- [6] MOURA, C. A.; BURGARELLI, D.; “Tópicos de Análise Funcional na Computação Científica”; *Notas em Matemática Aplicada*, V.45, SBMAC, 2010.