Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Solução do Problema de Helmholtz com o Método dos Elementos de Contorno usando a técnica de interpolação direta com funções radiais

Carlos F. Loeffler **Pedro V. M. Pereira**
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFES
29075-910, Vitória, ES – Brasil
E-mail: carlosloeffler@bol.com.br
E-mail: pedrovinicius012@gmail.com

RESUMO

Um significativo esforço de pesquisa tem objetivado flexibilizar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) por meio de formulações alternativas baseadas no emprego de procedimentos de interpolação usando funções de base radial. Isto porque muitos problemas de interesse prático não se expressam em termos de equações cujos operadores são autoadjuntos ou, então, a forma integral inversa é demasiadamente complicada.

Nesse sentido, a primeira grande contribuição veio com a formulação com Dupla Reciprocidade (FDR) [2] que permitiu a simulação acessível de casos transientes, problemas de valor característico, resposta dinâmica e aqueles em que há fontes ou ações de domínio, anteriormente resolvidos de modo custoso e relativamente complexo. Não obstante os resultados satisfatórios, a FDR esbarra em certas imprecisões numéricas no processamento do avanço no tempo.

O objetivo deste trabalho é utilizar a nova técnica de solução MECIC para resolver o termo integral referente à inércia na Equação de Helmhotz. O procedimento já foi empregado com êxito nos problemas de Poisson [1]. Esta técnica emprega um procedimento de interpolação com funções de base radial, similar ao processo da FDR, mas é mais geral e robusto.

Considera-se a Equação de Helmholtz em sua forma integral inversa [2], dada por:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_\Gamma u(X)q^*(\xi;X)d\Gamma - \int_\Gamma q(X)u^*(\xi;X)d\Gamma = \frac{1}{c^2}\,\omega_n^2 \int_\Omega u(X)u^*(\xi;X)d\Omega \tag{1}$$

Na Equação (1), u(X) é o potencial escalar e q(X) sua derivada normal; $u^*(\xi,X)$ é a solução fundamental e $q^*\,(\xi,X)$ é sua derivada normal; ω_n são as frequências naturais associadas. O coeficiente c(ξ) depende do posicionamento do ponto ξ com relação ao domínio físico Ω(X) [3]. Na MECIC, o núcleo completo da integral de domínio é interpolado na forma:

$$\int_\Omega u(X)u^*(\xi;X)d\Omega = \int_\Omega {}^{\xi}\alpha^i F^i(X^i;X)d\Omega = \int_\Omega ({}^{\xi}\alpha^j \Psi^j_{,ii}(X))d\Omega = {}^{\xi}\alpha^j \int_\Gamma \eta^j\,(x)d\Gamma \tag{2}$$

As funções de interpolação F_i são funções de base radial. Para cada ponto fonte ξ, a interpolação dada pela equação (1) corresponde a uma varredura de todos os pontos base X_i em relação aos pontos X do domínio, ponderada pelos coeficientes ${}^{\xi}\alpha^i$. Estes coeficientes podem ser obtidos através da solução do sistema de equações algébricas:

$$\left[{}^{\xi}\alpha\right] = [F]^{-1}\left[{}^{\xi}\Lambda\right][F]\alpha = [F]^{-1}\left[{}^{\xi}\Lambda\right][u] \tag{3}$$

Com a discretização da equação integral, feita através de procedimentos tradicionais do MEC [3] e utilizando-se a equação (3), resulta o seguinte sistema de equações em forma matricial, já considerando a existência de pontos internos interpolantes, cujas submatrizes estão destacadas na expressão a seguir:

$$\begin{pmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_c \\ u_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{cc} & O_{ci} \\ G_{ic} & O_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_c \\ q_i \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_c \\ u_i \end{pmatrix} \tag{4}$$

Para ilustrar, resolve-se problema simples, unidimensional e harmônico, em que os valores de w são acrescidos gradativamente. Duas malhas com 80 e 160 elementos de contorno lineares e 81 e 144 pontos internos são utilizadas na simulação. A figura 1 à esquerda ilustra as características geométricas do problema e, à direita, o valor do erro médio percentual.

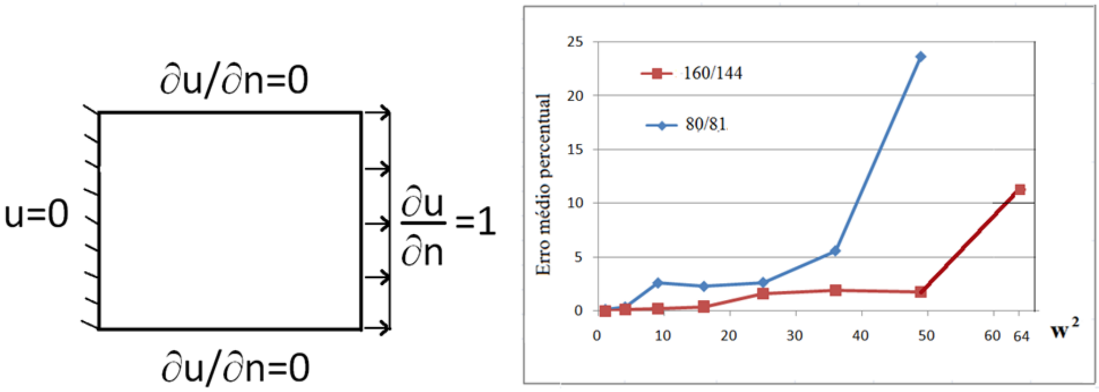

Figura 1 - Características geométricas do problema e valor de erro médio obtidos.

Nota-se a boa precisão dos resultados para as baixas frequências. Embora os erros cresçam para valores de frequência mais altos, ressalta-se que a matriz de massa gerada pela MECIC é multiplicada pelo quadrado destas, resultando numa participação potencialmente maior desta matriz com relação às matrizes de rigidez H e G. Estes resultados são bem superiores aos obtidos com a FDR para o mesmo espectro de variação mostrado [4].

Palavras-chave: Métodos Numéricos, Elementos de Contorno, Problemas de Helmholtz

Referências

[1] C.A. Brebbia, S. Walker, “Boundary Element Techniques in Engineering”, Newnes-Butterworths, London, 1980.

[2] A. L. Cruz, " Modelagem Direta de Integrais de Domínio usando Funções de Base Radial no contexto do Método dos Elementos de Contorno”, Diss. de Mestrado, PPGEM/UFES, 2012.

[3] C. F. Loeffler, W. J. Mansur, “Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método dos Elementos de Contorno”, *Revista Brasileira de Engenharia*, Vol 4, n° 2, pag. 5-23, 1986.

[4] P. W. Partridge, C. A. Brebbia, L. C. Wrobel, “The Dual Reciprocity Boundary Element Method”, first ed., Computational Mechanics Pub., 1992.

