Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Método de Broyden como um Método ABS em blocos

Emerson Vitor Castelani **Ronaldo Lopes***
Depto de Matemática, Universidade Estadual de Maringá
87020-900, Maringá, PR
E-mail: evcastelani@uem.br, ronaldolps@hotmail.com,

Wesley Vagner I. Shirabayashi
Depto de Matemática, Universidade Estadual de Maringá
87020-900, Maringá, PR
E-mail: wvishirabayashi@uem.br.

RESUMO

No artigo [4], publicado por C. G. Broyden no ano de 1965, foi introduzida uma classe de métodos iterativos para resolução de sistemas não-lineares da forma $F(x) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Nesse artigo o autor propôs que as atualizações dos vetores x_k, aproximações de uma solução, fossem feitas seguindo a ideia do método de Newton, ou seja,

$$x_{k+1} = x_k + s,$$

onde s é uma solução para o sistema

$$F'(x_k)s = -F(x_k),$$

sendo $F'(x_k)$ a matriz Jacobiana de F calculada em x_k.

No método de Broyden a ideia é trocar a matriz $F'(x_k)$ por uma matriz mais fácil de ser calculada H_k, no sentido que exija menos operações para ser encontrada do que a Jacobiana da função. Broyden sugeriu que as matrizes H_k devessem satisfazer a equação secante

$$H_k[F(x_k) - F(x_{k-1})] = (x_k - x_{k-1}),$$

com isso as matrizes H_k contém informações sobre a função F. Para reduzir o número de operações necessárias para obter as matrizes H_{k+1}, também foi imposto que H_{k+1} fosse obtida por meio de uma atualização de posto 1 da matriz anterior H_k.

Pode-se facilmente aplicar o de método de Broyden para o caso de sistemas de equações lineares, cuja matriz dos coeficientes é quadrada. Considere o sistema linear:

$$Ax = b,$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz com posto completo e $b \in \mathbb{R}^n$.

Um teorema enunciado no artigo [6] (Teorema 3.3) garante que, sob certas condições, para um sistema de equações lineares quadrado de ordem n, o método de Broyden encontra uma solução em no máximo $2n$ iterações. Já no artigo [5] (Teorema 2.4), é apresentado um resultado que garante que o método de Broyden quando aplicado para resolver um sistema de equações lineares quadrado de ordem n encontra uma solução exatamente após $2n$ iterações.

Os métodos ABS foram introduzidos no artigo [1], por J. Abaffy, C.G. Broyden e E. Spedicato, onde foi mostrado que tais métodos obtêm uma solução de um sistema linear com n equações em no máximo

*bolsista de Mestrado - Capes

n iterações, independente do número de variáveis do sistema. Quando aplicados a um sistema linear quadrado com posto completo, digamos n, então uma solução é obtida em n iterações. No trabalho [2] os autores construíram uma generalização dos métodos ABS, chamada por eles de métodos ABS em blocos, nos quais pode-se resolver um bloco de equações de um dado sistema em cada iteração.

No artigo [3] os autores mostraram que o método de Broyden, aplicado a sistemas lineares, é equivalente a um método da classe ABS, no sentido que utilizando o mesmo ponto inicial eles geram a mesma sequência de iterandos. Neste trabalho vamos mostrar um tipo de generalização do resultado de [3] para os métodos ABS em blocos. Mostraremos que existem escolhas para um método ABS em blocos que faz com os iterandos gerados sejam os mesmos obtidos pelo método de Broyden, utilizando o mesmo ponto inicial.

A demostração segue a mesma linha adotada em [3], utiliza-se o Lema 3.2 de [6], que garante a existência de um conjunto linearmente independente de vetores t_i satisfazendo

$$t_1^T F_j = 0,\ \forall\, j \geq 1,$$

$$t_l^T F_j = t_{l-2}^T,\ l = 3, 5, 7, \ldots, 2n-1,\ \forall\, j \geq l,$$
$$t_i^T g(x_j) = 0,\ j = i+1, i+2, \ldots, 2n-1,$$

onde $g(x) = Ax - b$ e $F_k = I - AH_k$, aqui H_k é a matriz do método de Broyden.

O ponto chave da demonstração é a matriz $V = [V_0, V_1, \ldots, V_r]$ escolhida para a partição dos blocos, no método ABS em blocos. Tal matriz será definida por $V = [t_1, t_3, t_5, \ldots, t_{2n-1}]$ e as partições V_k são definidas convenientemente, para que ocorra a igualdade dos iterandos deste método ABS em blocos com os do método de Broyden.

Palavras-chave: *Sistemas lineares, Método de Broyden, Método ABS em blocos*

Referências

[1] J. Abaffy, C.G. Broyden, E. Spedicato, A Class of Methods For Linear Systems, *Numerische Mathematik*, 45 (1984) 361-376.

[2] J. Abaffy, A. Galantai, Conjugate Direction Methods for Linear and Nonlinear Systems of Algebraic Equations, em "Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Numerical Methods, Miskolc, Hungary, (1986)" P. Rózsa e D. Greenspan, eds.) Vol. 50 pp. 72-147, North Holland, Amsterdam, Netherlands, 1987.

[3] M. Adib, N. Mahdavi-Amiri, E. Spedicato, Broyden's method as an ABS algorithm, *Publications of the University of Miskolc. Series D. Natural Sciences Mathematics*, 40 (1999) 3-13.

[4] C.G. Broyden, A class of methods for solving nonlinear simultaneous equation, *Math. Comp.*, 19 (1965) 577-593.

[5] D.M. Gay, Some Convergence properties of Broyden's Method, *SIAM. J. Numer. Anal.*, 16 (1979) 623-630.

[6] D.P. O'Leary, Why Broyden Nonsymmetric Method Terminates on Linear Equations, *SIAM. J. Optim.*, 5 No. 2 (1995) 231-235.

