

Efeitos de refinamentos h e p para subespaços de funções do tipo $H\text{div}$ em malhas irregulares

Denise de Siqueira

Departamento de Matemática, UTFPR

80230-901, Curitiba, PR

E-mail: denisesiqueira@uftpr.edu.br

Philippe R.B. Devloo

Faculdade de Engenharia Civil, FEC, Unicamp

13083-552, Campinas, SP

E-mail: phil@fec.unicamp.br

Sônia M. Gomes

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, Unicamp

13083-859, Campinas, SP

E-mail: soniag@ime.unicamp.br.

Resumo: *É sabido que o emprego de formulações mistas é mais apropriado para simulações de fluxos em meios não homogêneos do que o modelo clássico em termos apenas da pressão. Tais formulações tem como característica a aproximação simultânea dos campos de pressão e velocidade, podendo fornecer boas soluções numéricas para esses campos ao mesmo tempo em que garante a conservação local de massa. No entanto para adotar tal estratégia é necessária a construção de bases para subespaços de elementos finitos do tipo $H\text{div}$ para o fluxo que sejam balanceados com subespaços de elementos finitos para a pressão. Em [2] foi apresentada uma sistemática de construção de bases para subespaços de $H\text{div}$ usando funções vetoriais polinomiais de grau uniforme em malhas triangulares e quadrilaterais. O presente trabalho tem como objetivo apresentar o desempenho das aproximações construídas na presença de refinamentos h e p em malhas irregulares.*

Palavras-chave: *Formulações Mistas, Espaços $H\text{div}$, Refinamentos h e p , Malhas irregulares*

1 Introdução

Os métodos mistos são conhecidos por utilizarem mais de um espaço de aproximação em sua formulação. Tal técnica é adotada quando se deseja aproximar simultaneamente duas ou mais variáveis de interesse. Se considerarmos um problema elíptico, como o descrito por um problema de Darcy, podemos fazer uso dos métodos mistos com o intuito de se aproximar, simultaneamente, as variáveis de pressão e velocidade. Para um bom desempenho deste tipo de abordagem é necessário um balanceamento entre os espaços envolvidos. No caso do problema de Darcy, procura-se que o espaço de aproximação associado à variável de fluxo (espaço $H\text{Div}$) e o espaço de aproximação associado à pressão, sejam balanceados.

Em [2] foi estabelecida uma sistemática para construção de funções de base bidimensionais para subespaços de elementos finitos $V_h \subset H\text{div}$. A sistemática consiste em multiplicar funções escalares φ do tipo H^1 , desenvolvidas em [1], por vetores \mathbf{v} , convenientemente construídos, gerando funções vetoriais $\mathbf{u} = \varphi \mathbf{v}$.

A particularidade desta construção está no fato de que o campo vetorial é construído baseando-se na geometria de cada elemento da partição, não no elemento mestre (ou de referência), o que evita problemas com orientação de vetores. As características de conformidade para funções de H^1 das funções de base φ , em conjunto com os aspectos específicos do campo vetorial, possibilitam a validação da condição fundamental dos espaços do tipo Hdiv que é a continuidade da componente normal nas interfaces dos elementos.

Uma vez criadas funções de base para subespaços do tipo HDiv, é necessário estudar seu balanceamento com o espaço de aproximação associado à variável de pressão. Os testes numéricos apresentados em [2] mostram que, para malhas triangulares uniformes, um tipo de balanceamento é conseguido se a ordem polinomial k adotada para um subespaço de aproximação Hdiv para a variável de fluxo for uma ordem a mais se comparada com aproximações em L^2 para variável de pressão. Em tal caso, os pares de espaços de aproximação são denotados por $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$. Para malhas quadrilaterais, é necessário enriquecer o espaço de fluxo com algumas funções, convenientemente escolhidas, de modo a manter o balanceamento entre os espaços. Adotando-se ordem k para pressão, para o subespaço associado ao fluxo acrescentam-se algumas funções de ordem $k + 1$ associados aos graus de liberdade internos ao elemento, denotados por $\mathcal{Q}_k^+ \mathcal{Q}_k$. O objetivo do presente estudo é verificar se esse balanceamento se mantém no contexto de malhas não uniformes com refinamentos dos tipos h e p .

2 Problema modelo

Considera-se o problema modelo de encontrar p tal que

$$\begin{cases} \Delta p = f, & \text{em } \Omega = [0, 1]^2 \\ p = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

cuja solução analítica é dada por

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sin(\pi x) \cos(\pi y), \\ \mathbf{u}(x, y) &= -\nabla p = (-\cos(\pi x) \cos(\pi y), \sin(\pi y) \sin(\pi x))^T. \end{aligned}$$

A formulação mista associada a tal problema é dada por: Encontrar $(\mathbf{u}, p) \in Hdiv \times L^2$ tal que

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \nabla p & \text{em } \Omega, \\ div(\mathbf{u}) = f & \text{em } \Omega, \\ p = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Considerando $V_h \subset H(div)$ e $Y_h \subset L^2$ subespaços de aproximação, o problema discreto associado a (2) consiste em: Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Y_h$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{v}_h, w_h) = f_h \quad \forall w_h \in Y_h. \end{cases} \quad (3)$$

Consideram-se subespaços baseados em dois tipos de malhas, uniforme e não uniforme. Para as malhas não uniformes, o padrão de refinamento adotado é ilustrado na Figura 1.

3 Experimentos Numéricos

Os experimentos numéricos apresentados a continuação foram implementados no NeoPZ (www.labmec.org.br/wiki/neopz/start), uma plataforma de código aberto, formada por um conjunto de classes, idealizadas para permitir o desenvolvimento de códigos de elementos finitos com muita flexibilidade, permitindo refinamentos do tipo hp , em que foram incorporados os espaços de aproximação do tipo Hdiv mencionados.

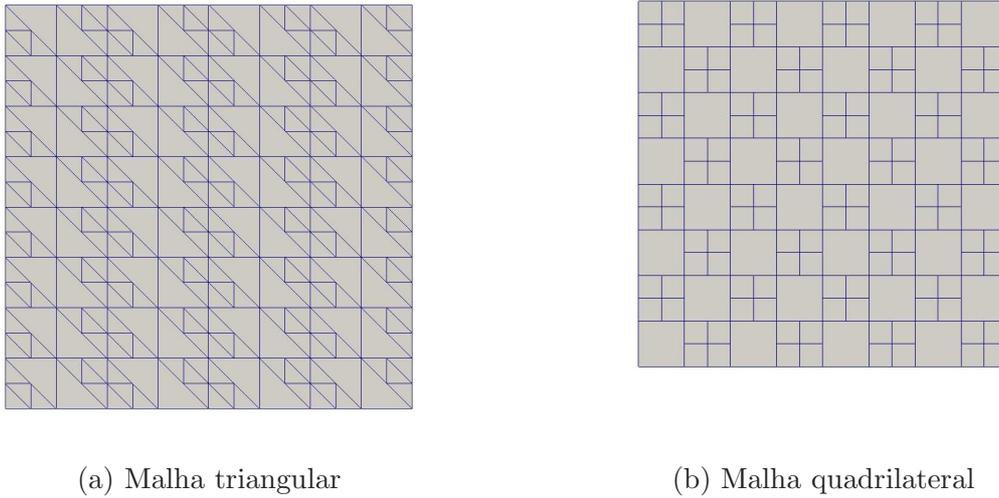


Figura 1: Malhas não uniformes

A Figura 2 apresenta os resultados obtidos usando malhas triangulares com refinamento do tipo h , para diferentes ordens polinomiais. O gráfico apresenta a relação entre o $\log(h)$ pelo $\log(\text{erro})$, sendo h o espaçamento da malha e o erro calculado na norma L^2 . As linhas tracejadas indicam os resultados para malhas não uniformes, ou seja, para refinamentos cujo padrão é como ilustrado na Figura 1 (a), enquanto que as linhas contínuas indicam malhas uniformes.

É possível observar que a taxa de convergência para a variável de fluxo \mathbf{u} é uma ordem a mais, se comparada com a da pressão p e que as taxas de convergência não foram alteradas com a utilização de malhas não uniformes. Mais do que isso, observa-se que o erro nas aproximações com malhas triangulares não uniformes é um pouco menor se comparado com os resultados da malha regular.

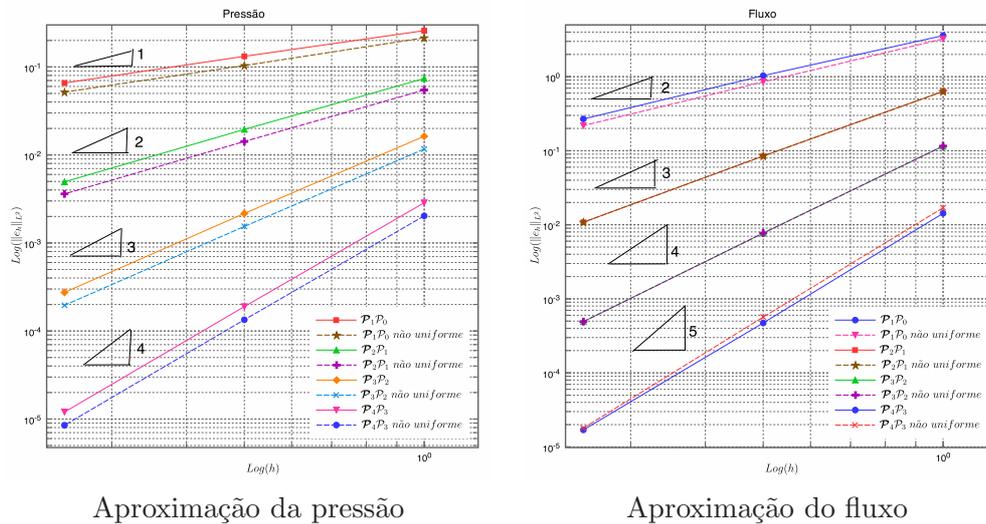


Figura 2: Taxas de convergência para malhas triangulares com refinamento do tipo h

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos com uma malha triangular com um refinamento uniforme na ordem polinomial, ou seja, mantém-se fixa a malha (uniforme ou não) e varia-se a ordem polinomial k do elemento. O resultado apresentado mostra a relação, em escala logarítmica,

do número de graus de liberdade pela norma L^2 do erro. Observa-se um comportamento do tipo exponencial, como esperado para este tipo de refinamento.

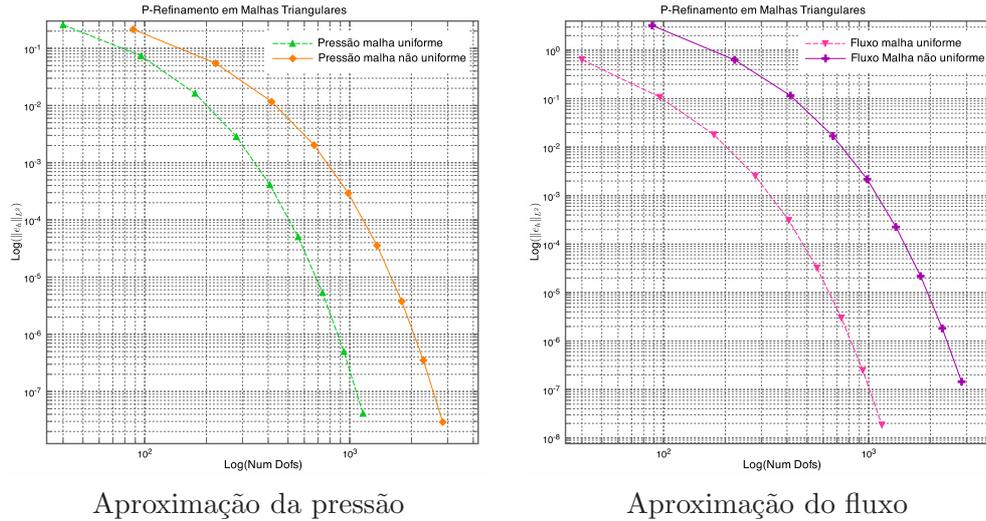


Figura 3: Taxas de convergência para malhas triangulares com refinamento na ordem polinomial.

A Figura 4 mostra as taxas de convergência utilizando malhas quadrilaterias. Assim como no caso triangular, as linhas tracejadas indicam o uso de malhas não uniformes enquanto que linhas contínuas indicam malhas uniformes.

De acordo com o gráfico, é possível observar que as taxas de convergência para fluxo e pressão são de mesma ordem. Tais resultados se justificam uma vez que o fluxo é aproximado por funções polinomiais de ordem k enriquecidas apenas com algumas funções de ordem $k + 1$. Observa-se ainda que, mesmo usando malhas não uniformes, a taxa de convergência mantém-se a mesma, sendo possível ainda observar que o erro nas malhas não uniformes é ligeiramente menor se comparado com as malhas uniformes.

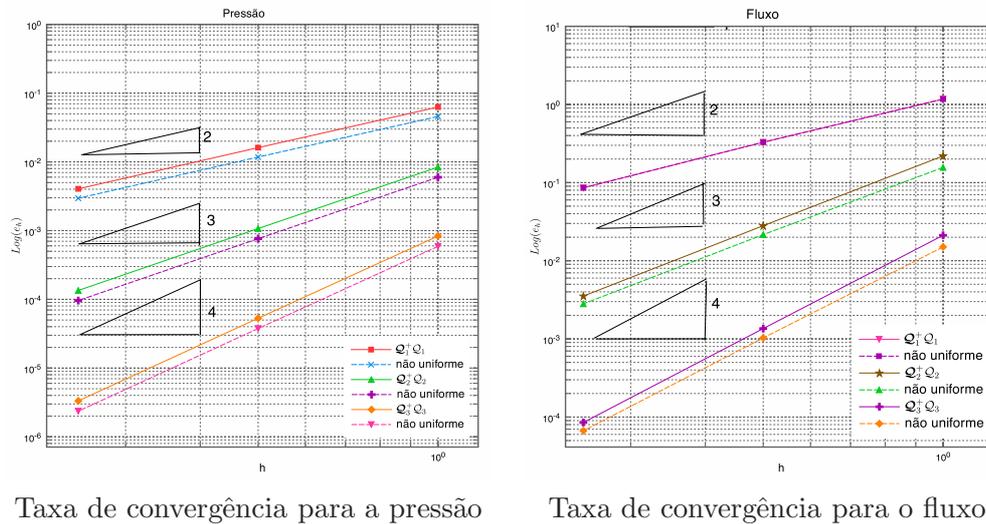


Figura 4: Taxas de convergência para malhas quadrilaterais com refinamento do tipo h

4 Conclusão

Foi implementado um h refinamento em malhas uniformes e não uniformes para espaços de aproximação para a formulação mista e foi observado que tanto para malhas quadrilaterias quanto triangulares a taxa de convergência manteve-se a mesma, o que mostra a consistência do refinamento h para os subespaços adotados.

Observou-se ainda que, tanto para o fluxo quanto para a pressão, o erro absoluto nas aproximações baseadas em malhas quadrilaterias (com refinamento uniforme ou não) é menor se comparados com as malhas triangulares.

Aplicou-se ainda testes para verificar a consistência dos subespaços desenvolvidos com relação ao refinamento da ordem polinomial. Os resultados numéricos mostram um decaimento do erro na norma L^2 do tipo exponencial, de acordo com o apresentado na literatura.

Na continuação, pretende-se avaliar também o comportamento de tais subespaços quando uma distribuição não uniforme das ordens de aproximação é utilizada (refinamento do tipo hp).

Referências

- [1] Bravo, C. M. A. A., Devloo, P. R. B., Rylo, E.C., Systematic and generic construction of shape functions for p -adaptive meshes of multidimensional finite elements, *Comp. Met. Appl. Mech. Eng.* 198 (2009) 1716-1725.
- [2] Siqueira, D., Devloo, P. R. B., Gomes, S.M., Hierarchical high order finite element approximation spaces for Hdiv and Hcurl, in: G. Kreiss, P. Lötstedt, Malqvist A., M. Neytcheva (Eds.), *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, Springer, Upsalla, 2009, pp. 267-274.
- [3] Siqueira, D. ; Devloo, P.R.B. ; Gomes, M. Sonia . A new procedure for the construction of hierarchical high order Hdiv and Hcurl finite element spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 240, p. 204-214, 2013.