Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Subespaços de Krylov: GMRES(m) com precondicionadores

Josimara Tatiane da Silva*
Depto de Matemática, UFRN,
59078-970, Natal, RN
E-mail: josimaratatiane@hotmail.com,

Julia Victoria Toledo Benavides
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Departamento de Matemática
59078-970, Campus Natal, Natal, RN
E-mail: julia@ccet.ufrn.br.

RESUMO

Grandes sistemas não simétricos esparsos e mal condicionados surgem frequentemente na discretização de EDPs. Logo, a resolução de sistemas lineares do tipo $Ax = b$, onde A é uma matriz de grande porte, é computacionalmente inviável através de métodos analíticos como regra de Crammer, eliminação gaussiana.

O GMRES foi publicado em 1986 por Saad e Schultz como um método de subespaços de Krylov, [7]. Dessa forma, o GMRES é um método iterativo para resolver sistemas lineares da forma

$$Ax = b$$

onde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz esparsa e $x, b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

As variações do GMRES são amplamente usadas nas aplicações de dinâmica do fluido computacional. Também é uma escolha comum na supercomputação, para mais exemplos, ver [3],[4].

Queremos minimizar o vetor resíduo $r = b - Ax$ para obtermos uma solução aproximada para este sistema. O GMRES é um método de projeção e pertence à família dos subespaços de Krylov. Antes de discutirmos sobre o GMRES, apresentaremos um algoritmo de projeção oblíqua, algumas definições e teoremas importantes sobre subespaços de Krylov, [1], [5]. Veremos o motivo pelo qual uma matriz que contém uma base para o espaço de Krylov da forma

$$\mathcal{K}_k = \begin{pmatrix} b & Ab & \cdots & A^{j-1}b \end{pmatrix}$$

não é adequada para a implementação numérica. Assim, precisaremos de um método para o cálculo de uma base ortonormal para um subespaço de Krylov. Usaremos neste trabalho o método de Arnoldi utilizado pelo GMRES. No caso do GMRES com estratégia de reinicialização GMRES(m), o valor de m limitará a dimensão do subespaço de Krylov. Uma das dificuldades encontradas é o fato de não termos critérios para a escolha do valor desse m, [6]. Por fim, apresentaremos o GMRES, GMRES precondicionado, GMRES(m) e GMRES(m) precondicionado e exemplos implementados no Matlab.

O precondicionamento é uma técnica usada para transformar o sistema original em um sistema mais simples de resolver, portanto, diminuindo o custo computacional, acelerando a convergência de um algoritmo também. Temos exemplos de muitos precondicionadores na literatura, [2], [4], [8], porém ainda não existe uma teoria justificando o sucesso de seu uso com quaisquer matrizes e aplicado ao GMRES(m). Dessa forma, podemos tentar fazer o uso de determinados precondicionadores para certos problemas e tentar encontrar algum padrão de convergência.

*bolsista de Iniciação Científica PROPESQ-IC

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0310

Realizamos alguns testes numéricos no software Matlab, como exemplo, usamos uma matriz de ordem 479 mal condicionada (número de condição igual a 1.4244×10^{12} , estabelecemos uma tolerância com precisão de 10^{-8} e realizamos os testes usando os algoritmos GMRES, GMRES com precondicionador ILU (LU incompleta), GMRES(10) e com o GMRES(10) com precondicionador ILU. Notamos que o GMRES(10) não convergiu com a tolerância desejada. O número de iterações do GMRES foi 477 enquanto que o GMRES(10) com precondicionador convergiu em 1 iteração e teve o menor CPUtime(s). Existem outros tipos de precondicionadores na literatura que podem ser testados. Em geral, fatorações incompletas, inversa aproximada, são alguns exemplos clássicos de classes de precondicionadores na literatura, [1], [8].

Palavras-chave: *Subespaços de Krylov, Métodos Numéricos, Métodos de Projeção, Sistema Linear, Precondicionadores, GMRES, GMRES(m)*

Referências

[1] L. M. Carvalho, S. Gratton, Rafael Lago, N. Maculan, Álgebra Linear Numérica e Computacional - Métodos de Krylov para a Solução de Sistemas Lineares, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2010.

[2] W. R. Fortes, Precondicionadores e Solucionadores para resolução de sistemas lineares obtidos de simulação de enchimento de reservatórios, Tese de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2008.

[3] J. Higgins, Introducing GMRES: a simple analysis of the algorithm, South Dakota, 2004.

[4] C. T. Kelley, Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations, Philadelphia, 1995.

[5] V. S. Motta, Solução de sistemas lineares de grande porte com múltiplos lados direitos, Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, 2010.

[6] C. E. P. Poma, Um Solucionador Iterativo Para Sistemas-Lineares: Aplicação no Problema do Fluxo de Carga, Tese de doutorado, PUC-RJ, Departamento de Engenharia Elétrica, 2010.

[7] Y.Saad, M. H. Schultz, GMRES: a Generalized Minimal Residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM, 1986.

[8] H. van der Vorst, Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems, Cambridge Monographs on Apllied and Computational Mathematics, Cambridge, 2003.

