Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Sistemas não-lineares, o método de Newton e Fractais

Fabio A. Dorini **Hellen C. Spengler***
E-mail: fabio.dorini@gmail.com, hellen.spengler@hotmail.com .

Roy Wilhelm Probst
E-mail: rwprobst@gmail.com.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná,
80230-901, Curitiba, PR

RESUMO

1 Introdução

Nesse trabalho é abordado o método de Newton para sistemas não lineares do tipo $F(x) = 0$, em que F é uma função de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Além disso, com o auxílio do software Matlab há uma breve apresentação de um exemplo de implemetação do método, visando investigar interessantes formações de bacias de atração e fractais.

2 Método de Newton

O método de Newton tem por objetivo encontrar solução numérica de equações não lineares. O método consiste em linearizar e iterar esse passo até estar suficientemente próximo das raízes [1].

No caso de um sistema linear de uma equação, $y = f(x)$, objetiva-se determinar $x^* \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x^*) = 0$.

Geometricamente, dado x_0 uma aproximação inicial para x^*, observe que a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é a linearização de f nesse ponto. Logo, o ponto seguinte, x_1, será a interseção dessa reta com o eixo x (solução de uma equação linear). Procurando generalizar o processo de iteração para x_{k+1} tem-se que,

$$\tan\theta = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} = f'(x_k), \quad \text{ou seja,} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (k = 0, 1, ...).$$

Entre as formas de parada para o método, é possível estabelecer uma tolerância ϵ que limite a diferença das iterações ($|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$) ou a própria função aplicada em x_k ($|f(x_k)| < \epsilon$), em que x_k é a solução procurada.

Agora, considere o conjunto de duas equações não lineares [2],

$$f_j(x_1, x_2) = 0, \quad j = 1, 2,$$

em que as funções são não lineares. Usando notação vetorial para uma escrita mais concisa, o sistema formado por estas equações será representado por

$$F(\mathrm{x}) = 0$$

onde $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ é um vetor coluna de variáveis independentes e $F(\mathrm{x}) = (f_1(\mathrm{x}), f_2(\mathrm{x}))$ é uma função vetorial de variáveis vetoriais.

*bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

Seja x_i a i-ésima aproximação da solução e tomando F_i por $F(x_i)$, o método de Newton define que

$$\mathrm{x}_{i+1} = \mathrm{x}_i - A_i^{-1} F_i,$$

onde A_i é a matriz jacobiana avaliada em x_i $(\partial f_j / \partial \mathrm{x}_k)$.

Note que o processo de iteração é análogo ao problema de uma equação não linear, porém para obter a aproximação da solução é utilizada a série de Taylor de primeira ordem para funções vetoriais com variáveis vetoriais.

Procurando evitar a inversão da matriz jacobiana, faz-se necessária a resolução do sistema linear

$$A_i v = -F_i,$$

em que $v = \mathrm{x}_{i+1} - \mathrm{x}_i$.

Nesse âmbito, tem-se a seguinte sequência de iterações,

$$\mathrm{x}_{i+1} = \mathrm{x}_i + v,$$

em que x_0 é a aproximação inicial.

3 Resultados Numéricos

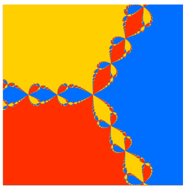
Para um estudo preliminar, é considerado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 1 = 0, \\ 3x^2y - y^3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

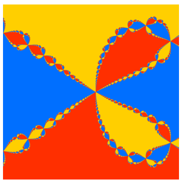
Observe que para diferentes pontos iniciais, o método de Newton converge, possivelmente, para diferentes soluções, que são associadas as cores conforme a tabela:

Soluções do sistema	Cores associadas
$(1, 0)$	Amarelo
$\left(-1/2, -\sqrt{3}/2\right)$	Vermelho
$\left(-1/2, \sqrt{3}/2\right)$	Azul

A Figura 1 mostra as bacias de atração, formando um fractal.



(a) $-2 \leq x, y \leq 2$



(b) $-1.75 \leq x \leq -1.15$, $-0.3 \leq y \leq 0.3$

Figura 1: Bacias de atração das soluções do sistema (1)

.

Palavras-chave: *Sistemas não-lineares, Método de Newton, Fractais*

Referências

[1] M. C. C. Cunha, "Métodos Numéricos", 2. ed., Campinas: UNICAMP, 2000.

[2] C. G. Broyden, A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations, *Mathematics of Computation*, 19 (1965) 577-593.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0311