

Implementação de método adaptativo no tempo para equações diferenciais parciais evolutivas

Muller M. S. Lopes

Curso de Pós Graduação em Computação Aplicada, CTE/INPE,
12227-010, São José dos Campos, SP
E-mail: mullermslopes@gmail.com

Margarete O. Domingues

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, CTE/INPE,
12227-010, São José dos Campos, SP
E-mail: margarete@lac.inpe.br

Odim Mendes

Divisão de Geofísica Espacial, CEA/INPE
12227-010, São José dos Campos, SP
E-mail: odim.mendes@inpe.br

RESUMO

Resoluções numéricas de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) evolutivas com soluções que apresentam poucas estruturas localizadas podem ter um alto custo computacional. Tornam-se assim importantes estudos realizados que visem desenvolver técnicas que reduzam este custo. Uma dessas técnicas é a de análise multirresolução no contexto de volumes finitos (VF) proposta por Ami Harten [2]. Nessa técnica, malhas adaptadas à solução podem ser construídas com base na avaliação da regularidade local da solução a cada instante de tempo. Uma malha menos refinada é utilizada nas regiões que apresentam maior regularidade. Uma adaptabilidade no tempo também é importante para uma maior aproveitamento da redução de custos dessas malhas adaptativas. Em [1], uma técnica de tempo local foi desenvolvida. Neste trabalho, que faz parte da Dissertação de Mestrado [3], estende-se essa ideia para ordens superiores utilizando outra metodologia de evolução temporal.

Os resultados obtidos com a técnica de tempo local proposta (MR/LT/RK3) de ordem três são comparados com a técnica sem as estratégias de tempo local. Mais detalhes dessas técnicas para ordem dois são apresentados em [1]. Nesse caso, as técnicas sem estratégia de tempo local são realizadas com métodos explícitos de Runge-Kutta de ordem 3 (denominado como MR/RK3). É utilizado o método VF tradicional no nível mais fino de refinamento para avaliar o erro cometido na solução.

O ganho em relação ao método sem adaptabilidade temporal é calculado como $gain = 1 - \frac{erro_{MR/LT}}{erro_{MR}} \cdot \frac{tempo_{MR/LT}}{tempo_{MR}}$. Os valores *erro* e *tempo* são respectivamente o erro médio e o tempo de CPU dos métodos considerados. O valor *gain* indica, em %, o ganho do método proposto em relação ao MR.

Este estudo apresenta a eficiência deste método na resolução numérica da Equação de Burgers, que representa um modelo simples de turbulência, e é dada por:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{1}{2} U^2(x, t) \right)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

em que $t > 0$ e $\mu = 0,003183099$ é o coeficiente de viscosidade.

Para o caso unidimensional, este modelo é resolvido numericamente utilizando as seguintes condições iniciais e de contorno: $U(0, t) = U(1, t) = 0$, $U(x, 0) = \sin(2\pi x)$.

Para este caso, a simulação é realizada até o instante 0,4, utilizando a constante CFL: $\sigma = 0,5$ e um valor de *threshold* $\epsilon = 10^{-3}$. Estas simulações foram realizadas utilizando um computador com processador Intel (R) Atom CPU 1, 6GHz.

Os resultados comparativos de tempo computacional, memória utilizada e erro médio obtido são apresentados na Tabela . Esses resultados são obtidos para malhas com diversos de níveis de refinamento. Para o melhor caso, $L = 13$, o método proposto apresentou um valor de *gain* de 44%. O método se mostrou mais eficiente a medida em que são utilizadas malhas com mais níveis de refinamento Conforme apresentado na Tabela , o método proposto apresentou o mesmo custo em memória e um menor tempo computacional em relação ao método MR/RK3, conquanto não houve alteração na ordem do erro obtido.

		Método	Erro médio ($\times 10^{-1}$)	CPU (%)	
				Tempo	Memória
$L = 11$		VF/RK3		100	100
		MR/RK3	0,56	35	23
		MR/LT/RK3	0,68	30	23
$L = 12$		VF/RK3		100	100
		MR/RK3	1,00	18	12
		MR/LT/RK3	1,10	12	12
$L = 13$		VF/RK3		100	100
		MR/RK3	1,50	10	6
		MR/LT/RK3	1,70	5	6

Tabela 1: Comparativo dos erros, tempos de processamento e economia de memória obtidas utilizando os métodos VF/RK3, MR/RK3 e a técnica MR/LT/RK3 proposta. $\epsilon = 10^{-3}$. Tempo final: $t_f = 0,4$.

Nota: Tempos computacionais obtidos pelo método VF/RK3: 6,4 min ($L = 11$); 53,1 min ($L = 12$); 398,8 min ($L = 13$).

Referências

- [1] DOMINGUES, M. O.; GOMES, S. M.; ROUSSEL, O.; SCHNEIDER, K. An adaptive multiresolution scheme with local time stepping for evolutionary PDEs. J. Comput. Phys., v. 227, n. 8, p. 3758-3780, abr. 2008.
- [2] HARTEN, A. Adaptive multiresolution schemes for shock computations. J. Comput. Phys., v. 115, p. 319-338, 1994. ISSN 1270-900X/e.
- [3] LOPES, M. ,Método de alta ordem para ajuste de passo de tempo local para resolução numérica de equações diferenciais evolutivas com uso de análise multirresolução adaptativa. Dissertação de Mestrado – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2014.