Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Estudo numérico dos métodos GMRES e LCD na solução de sistemas lineares provenientes da equação de convecção-difusão transiente

Laisa K. Muller* **Isaac P. Santos**
Depto de Matemática Aplicada, DMA/UFES,
29932-540, São Mateus, ES
E-mail: laisakmuller@gmail.com, isaac.santos@ufes.br,

RESUMO

Neste trabalho avaliamos o desempenho computacional dos métodos iterativos baseados nos espaços de Krylov: Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES) e Direções Conjugadas à Esquerda (LCD) aplicados na solução de sistemas lineares, provenientes da discretização via método de elementos finitos estabilizado SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) [2, 1] no espaço e diferenças finitas (método de Crank-Nicolson) no tempo, da equação de convecção-difusão transiente. Considere a equação de convecção-difusão transiente dada por

$$\begin{aligned} \partial_t u - \epsilon \Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u &= f, \quad \text{em } \Omega \times (0,T); && (1) \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T); && (2) \\ u(\boldsymbol{x},0) &= u_0(\boldsymbol{x}), \quad \text{in } \Omega, && (3) \end{aligned}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^2$ é um domínio aberto e limitado, $\epsilon > 0$ é o coeficiente de difusão, $\boldsymbol{\beta} \in [L^\infty(\Omega)]^2$ é o campo de velocidades, $f \in C^0(0,T;L^2(\Omega))$ é o termo de fonte, $u_0 \in L^2(\Omega)$ é a solução inicial e $\boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considerando o espaço de elementos finitos

$$V_h = \{u_h \in C^0(\Omega); u_h|_K \in \mathcal{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h; u_h|_{\partial\Omega} = 0\},$$

a formulação semi-discreta SUPG para resolver (1)-(3) consiste em encontrar $u_h \in V_h$, para todo $t \in (0,T)$, tal que $u_h(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x})$ e

$$\int_\Omega \Big(\partial_t u_h v_h + \epsilon \boldsymbol{\nabla} u_h \cdot \boldsymbol{\nabla} v_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_h v_h\Big) d\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K R(u_h)\delta_h \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} v_h d\Omega = \int_\Omega f v_h d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h, \tag{4}$$

onde $R(u_h) = \partial_t u_h - \epsilon \Delta u_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nabla} u_h$ e $\delta_h = h/2\|\boldsymbol{\beta}\|_\infty$. A equação (4) pode ser escrita em forma matricial,

$$M\dot{U}(t) + KU(t) = F(t). \tag{5}$$

Dado $u^0 = u_0(\boldsymbol{x})$, o método de Crank-Nicolson para resolver (5) consiste em resolver em cada passo de tempo t_n o sistema linear

$$(M + 0.5\Delta t K)u^{n+1} = (M - 0.5\Delta t K)u^n + 0.5\Delta t(F^{n+1} + F^n). \tag{6}$$

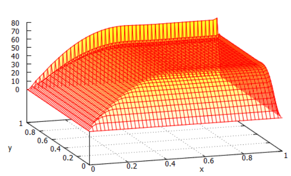
A solução em cada passo de tempo do sistema linear não-simétrico (6) é obtida através dos métodos *GMRES* e *LCD*.

*bolsista de Iniciação Científica UFES

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0314

0.1 Experimento Numérico

Neste experimento comparamos os métodos GMRES e LCD na solução de sistemas lineares provenientes da solução numérica, via método SUPG, de um problema de convecção-difusão transiente. Os algoritmos implementados em linguagem C são descritos em [3] (LCD) e [4] (GMRES). O coeficiente de difusão utilizado foi $\epsilon = 10^{-6}$, o campo de velocidades, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1/2)$, o termo de fonte, $f = 1$, o domínio $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e as condições de contorno e iniciais, homogêneas. A Fig. 1 apresenta a solução do problema usando uma malha 50×50, usando os métodos GMRES (figura à esquerda) e LCD (figura à direita). Ambas as soluções numéricas apresentam oscilações espúrias na região de camada limite próxima a $y = 1$. Considerando uma discretização de Ω através de uma malha de elementos triangulares



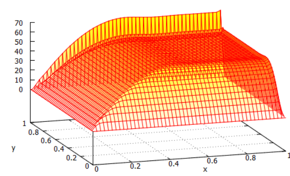


Figura 1: Solução numérica do problema de convecção-difusão usando os métodos GMRES (esquerda) e LCD (direita).

500×500, o sistema resultante possui quase 250 mil equações. A tolerância residual utilizada foi 10^{-3}. A Tabela 1 apresenta o número de iterações e tempo em CPU (em segundos) para ambos os métodos, considerando o número de vetores na base no processo de *restart*, $k_{max} = 5, 10, 20, 40$. Ambos métodos realizaram o mesmo número de iterações, porém, o método LCD foi um pouco mais rápido que o método GMRES.

malha 500×500				
	GMRES		LCD	
Kmax	Iterações	$Tempo_{CPU}$	Iterações	$Tempo_{CPU}$
5	600	535.878	600	531.183
10	600	539.637	600	534.949
20	600	541.348	600	535.479
40	600	544.799	600	537.428

Tabela 1: Desempenho Computacional dos métodos GMRES e LCD - malha 500×500.

Referências

[1] Baysal, O. "Stabilized Finite Element Methods For Time Dependent Convection-Diffusion Equations", Tese de Doutorado. Izmir: Izmir Institute Technology, 2012.

[2] Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. "Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32: 199-259, 1982.

[3] Catabriga, L.; Valli, A. M. P.; Melloti, B. Z. "Performance of LCD iterative method in the finite element and finite difference solution of convection-diffusion problems", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22: 643-656, 2006.

[4] Shakib, F.; Hughes, T.J.R, Johan Z. "A multi-element group preconditioned GMRES algorithm for nonsymetric system arising in finite element analysis", *Computer Methods in Applied Mechanis and Engineering*, 75: 415-456, 1989.

