Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Métodos de Runge-Kutta com Região de Estabilidade Estendida

Heloisa H. M. Silva
Depto de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: hsilva@ibilce.unesp.br

RESUMO

Apresentamos, neste trabalho, uma classe de métodos de Runge-Kutta explícitos com região de estabilidade estendida ao longo do eixo real negativo, denominados na literatura por métodos *estabilizados*. A motivação para a obtenção destes métodos é a integração de sistemas de equações diferenciais ordinárias originados da discretização espacial de equações diferenciais parciais parabólicas. Uma vantagem destes métodos quando comparados aos métodos implícitos é que não necessitam da solução de sistemas de equações algébricas de grande dimensão e, embora o intervalo real de estabilidade seja finito, é bem maior quando comparado aos dos métodos clássicos de Runge-Kutta explícitos e, portanto, não sofrem restrições de estabilidade muito severas.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias, originado da discretização espacial de uma equação diferencial parcial dependente do tempo, da forma:

$$y'(t) \,=\, F(t,y), \quad y(t_0) \,=\, y_0, \tag{1}$$

onde $y,\, y_0 \in \Re^n, t \geq 0$, e os autovalores da matriz Jacobiana, $J(t,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, estão localizados numa faixa longa e estreita ao longo do eixo real negativo.

Um método de Runge-Kutta explícito para a solução de (1) tem a forma geral

$$\begin{aligned} y_0 &= y_n, \\ y_j &= y_n + h\sum_{l=0}^{j-1} a_{jl} F(t_n + c_l\, h, y_l), \quad 1 \leq j \leq s, \\ y_{n+1} &= y_s, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $c_j = \sum_{l=0}^{j-1} a_{jl}$, $h = t_{n+1} - t_n$ denota o tamanho do passo e y_n é a aproximação para a solução exata $y(t)$ no tempo $t = t_n$. Um método particular é caracterizado pela escolha dos seus coeficientes, c_l e a_{jl}, e pelo número de estágios s.

A principal característica dos métodos *estabilizados* é que eles possuem intervalo de estabilidade real estendido com comprimento proporcional a s^2.

Para análise da estabilidade dos métodos explícitos dados por (2) consideramos a equação teste [4]:

$$y'(t) = \lambda\, y(t), \quad \lambda \in C, \quad Re(\lambda) < 0. \tag{3}$$

Aplicando, então, o método de Runge-Kutta (2) à equação (3) obtemos $y_{n+1} = [R(z)]^n y_0$, onde $R(z)$ é uma função polinomial de grau $\leq s$ denominada a função de estabilidade do método e $z = h\,\lambda$.

Para garantir que $\{y_n\}_{n\geq 0}$ permaneça limitada, a condição $|R(z)| \leq 1$ deve ser satisfeita e

$$S = \{z \in C; |R(z)| \leq 1\}$$

é definido como o domínio de estabilidade do método e o método é dito absolutamente estável para valores de $z \in S$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0319

O objetivo na obtenção de métodos *estabilizados* é construir métodos que tenham como função de estabilidade polinômios ótimos, isto é, polinômios que satisfazem a condição

$$|R(z)| \leq 1, \quad \text{para} \quad z \in [-\beta(s), 0], \tag{4}$$

para um valor tão grande quanto possível de $\beta(s) > 0$, onde s é o número de estágios de um método de Runge-Kutta.

Os polinômios que satisfazem esta condição são os polinômios de Chebyshev do primeiro tipo *shifted*,

$$R(z) = T_s(1 + z/s^2), \quad \beta(s) = 2s^2,$$

onde $T_s(.)$, o polinômio de Chebyshev de grau s, é dado por

$$T_0(z) = 1, \quad T_1(z) = z, \quad T_j(z) = 2\,z\,T_{j-1}(z) - T_{j-2}(z),\, j \geq 2.$$

Dado um polinômio com estabilidade ótima ou quase ótima, o objetivo é construir um método que tenha função de estabilidade dada por este polinômio. Para métodos com ordem de precisão $p \geq 2$, apenas aproximações de polinômios ótimos é possível. Duas estratégias principais propostas na literatura para construção de métodos *estabilizados* são métodos baseados na composição de passos de Euler como o método de Lebedev [5] e métodos obtidos através da relação de recorrência de três termos dos polinômios de Chebyshev, chamados métodos de Runge-Kutta-Chebyshev (RKC) [3], [7]. Métodos que utilizam uma combinação destas duas estratégias, com ordem de consistência 2 e 4, foram obtidos em [1] e [2], respectivamente. Em [8], um método de projeção baseado na classe de métodos de Runge-Kutta-Chebyshev foi apresentado para a solução das equações de Navier-Stokes em escoamentos incompressíveis.

Neste trabalho, apresentaremos a construção de métodos de Runge-Kutta-Chebyshev de ordens 1 e 2, com s estágios, seguindo a estratégia apresentada em [7]. Maiores detalhes sobre as propriedades de consistência, estabilidade e convergência desta classe de métodos podem ser encontrados em [6].

Palavras-chave: *Métodos de Runge-Kutta, Polinômios de Chebyshev, Equações Diferenciais Parciais Parabólicas*

Referências

[1] A. Abdulle, On roots and error constants of optimal stability polynomials, *BIT Numerical Mathematics*, 40(2000) 177-182.

[2] A. Abdulle, Fourth order Chebyshev methods with recurrence relation, *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(2002) 2041-2054.

[3] P. J. van Der Houwen, B. P. Sommeijer, On the internal stability of explicit, m-stage Runge-Kutta methods for large m-values, *J. App. Math. and Mechanics*, 60 (1980) 479-485.

[4] J. D. Lambert, "Computational Methods in Ordinary Differential Equations", John Wiley & Sons, London, 1973.

[5] V. Lebedev, Explicit difference schemes with time-variable steps for solving stiff systems of equations, *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 4 (1989) 111-135.

[6] J. G. Verwer, W. H. Hundsdorfer and B. P. Sommeijer, Convergence properties of the Runge-Kutta-Chebyshev method, *Numer. Math.*, 57 (1990) 157-178.

[7] J. G. Verwer, Explicit Runge-Kutta methods for parabolic partial diffferential equations, *Applied Numerical Math.*, 22 (1996) 359-379.

[8] Z. Zheng, Petzold, L., Runge-Kutta-Chebyshev projection method, *J. Comput. Physics*, 219 (2006) 976-991.

